Derivada Aplicaciones

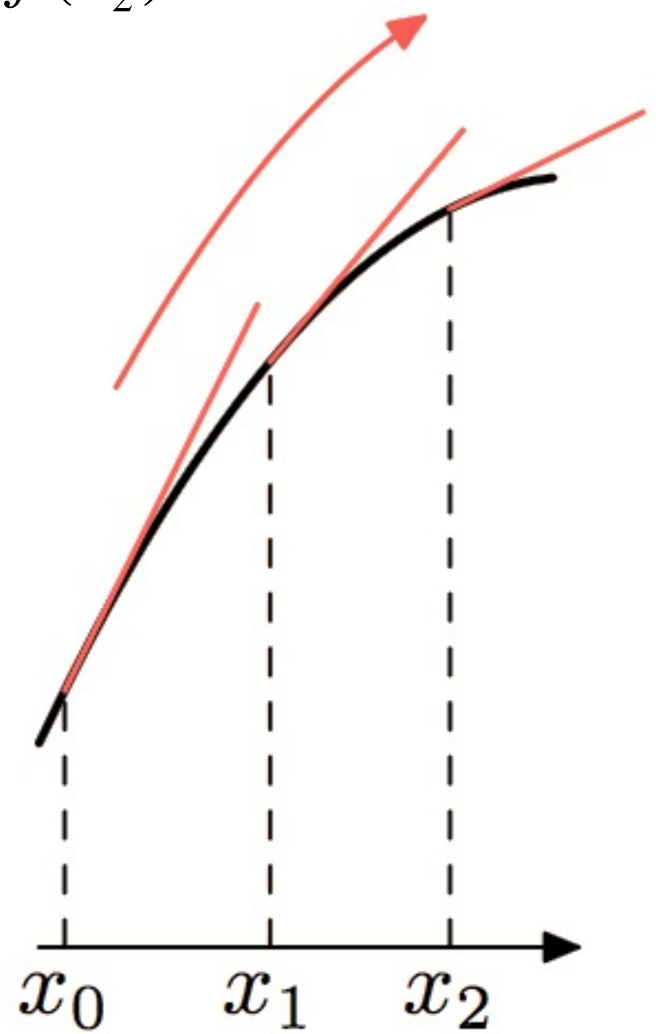
Prof. Alberto Alvaradejo
IVº Medio
Calculo II
2017

I. Función creciente

Una función continua ***f*** es estrictamente creciente en un intervalo **I** si cumple

$$x_0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$$

La derivada de una función ***y = f(x)*** en un punto *x* indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.



Si en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente **positiva** la función es **creciente**.

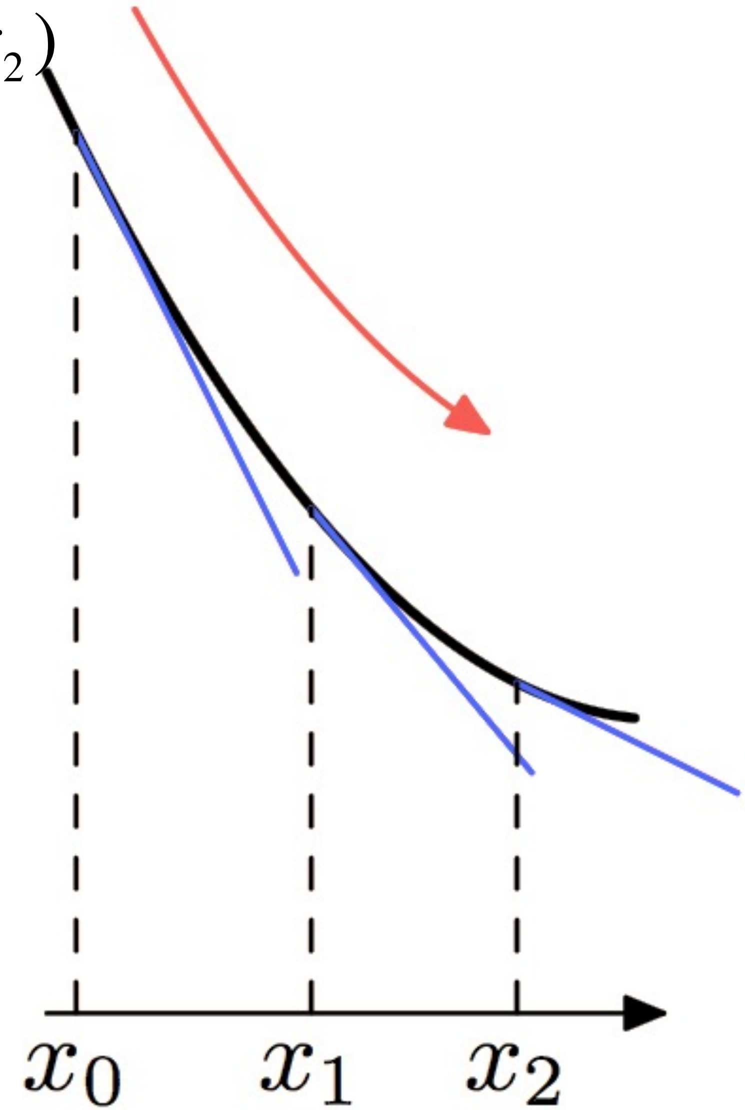
Si ***f(x)*** es derivable se tiene que

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ Creciente}$$

II. Función decreciente

Una función continua ***f*** es estrictamente decreciente en un intervalo ***I*** si cumple

$$x_0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$$



La derivada de una función ***y = f(x)*** en un punto ***x*** indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Si en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente negativa la función es decreciente.

Si ***f(x)*** es derivable se tiene que

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ Decreciente}$$

III.- Puntos Críticos

Sea ***f*** una función definida en un intervalo ***I***. Los puntos de la función que tienen tangente horizontal se llaman puntos críticos.
Como la tangente es horizontal su pendiente vale 0. En los puntos críticos se tiene que la derivada vale 0, ***f'(x) = 0***.

Hay tres casos:

3.1 El punto c_1 se llama punto mínimo relativo.

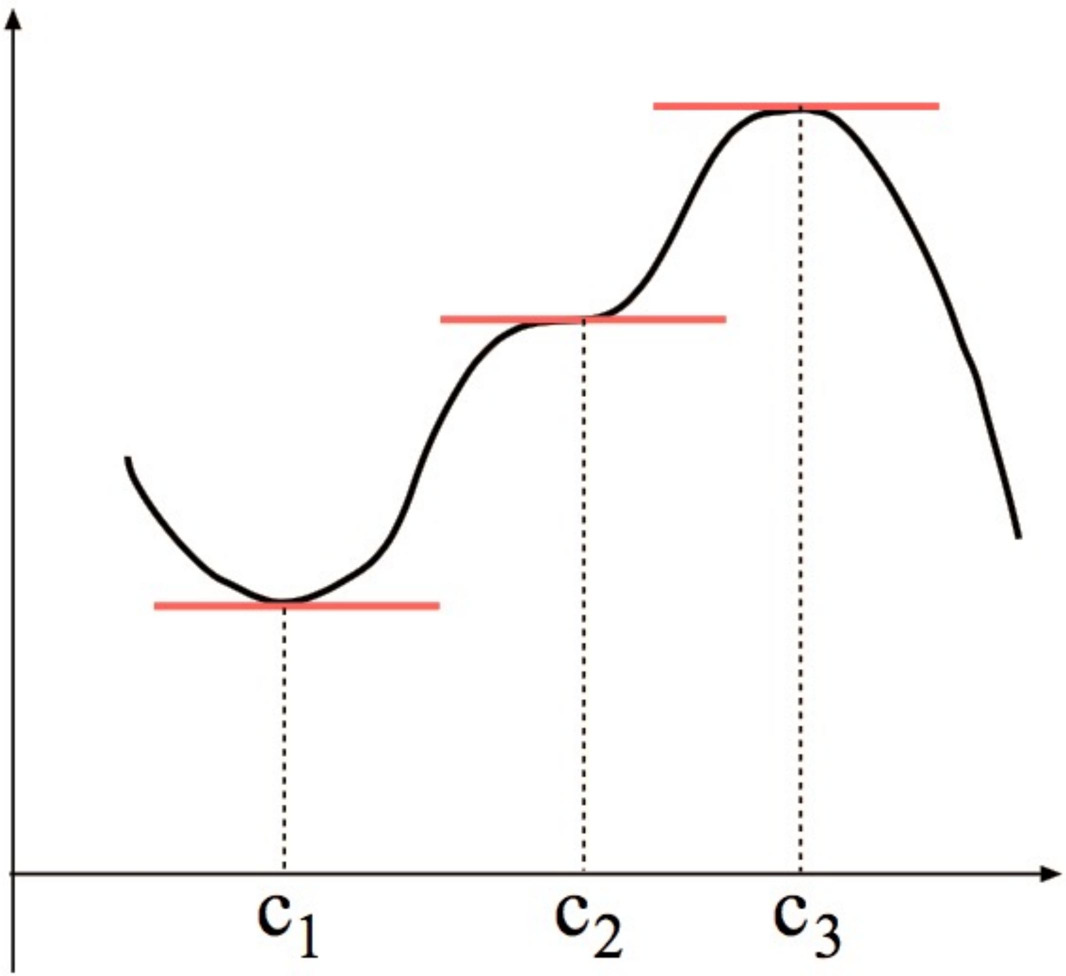
$$f'(c_1)=0$$

3.2 El punto c_2 se llama punto de inflexión.

$$f'(c_2)=0$$

3.3 El punto c_3 se llama punto máximo relativo.

$$f'(c_3)=0$$



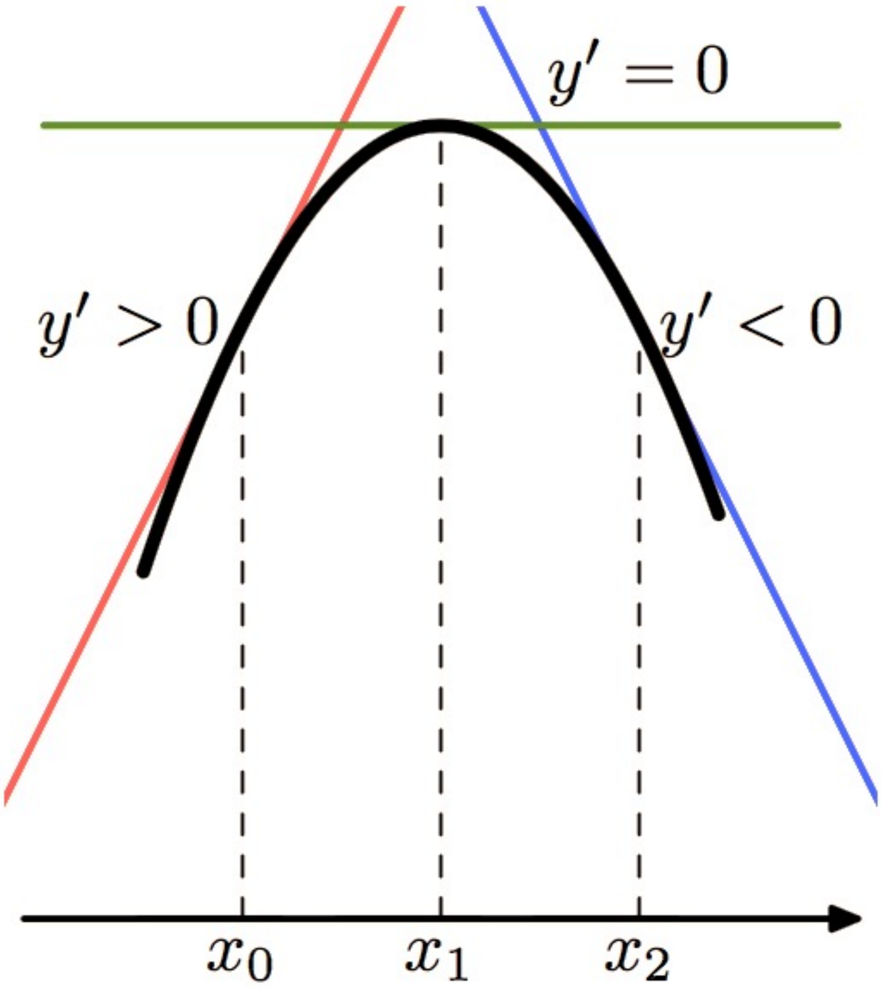
Máximo

- A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada ***y'>0***

- A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada ***y'<0***

- En el punto x_1 la tangente es horizontal y hay un máximo ***y'(x₁)=0***

	Máximo relativo		
		x_1	
y'	$+$	0	$-$
$y = f(x)$	$\nearrow$ creciente	$f(x_1)$	$\searrow$ decreciente



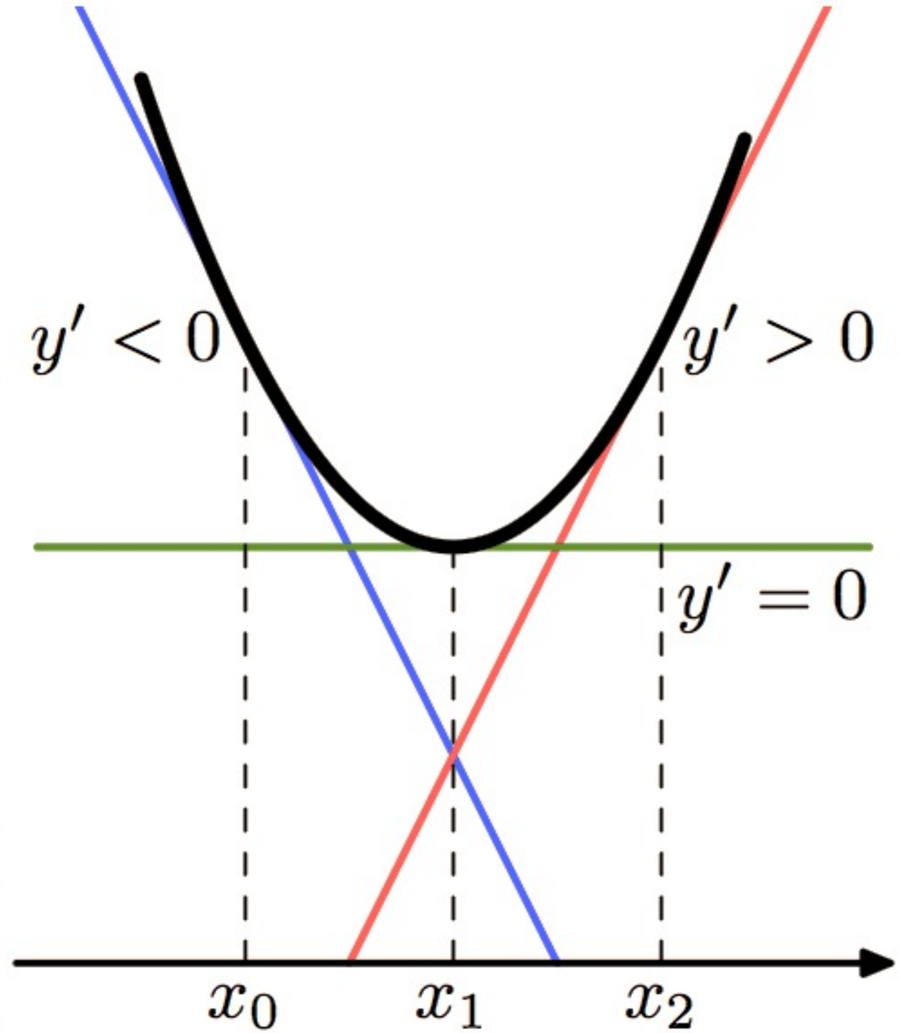
Mínimo

- A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada ***y'<0***

- A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada ***y'>0***

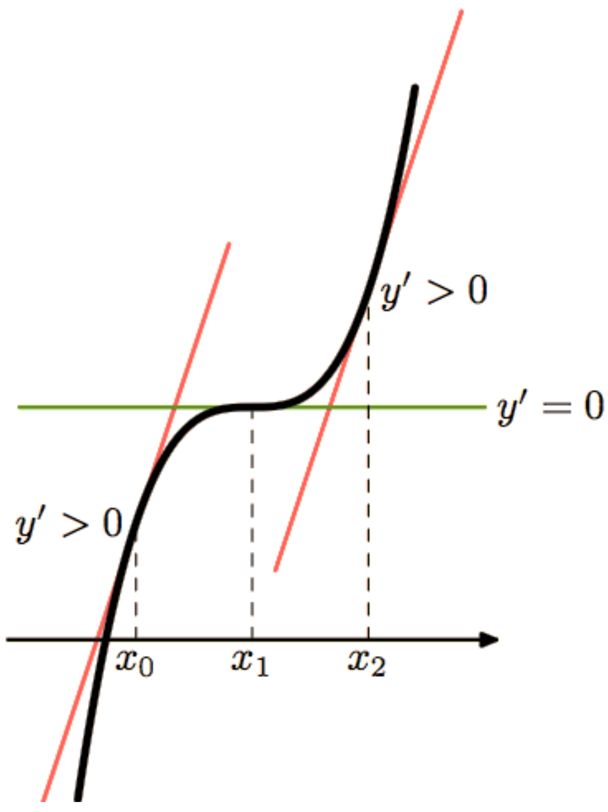
- En el punto x1 la tangente es horizontal y hay un mínimo ***y'(x***$\boldsymbol{y'(x_1)=0}$

	Mínimo relativo		
		x_1	
y'	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	$\searrow$ decreciente	$f(x_1)$	$\nearrow$ creciente

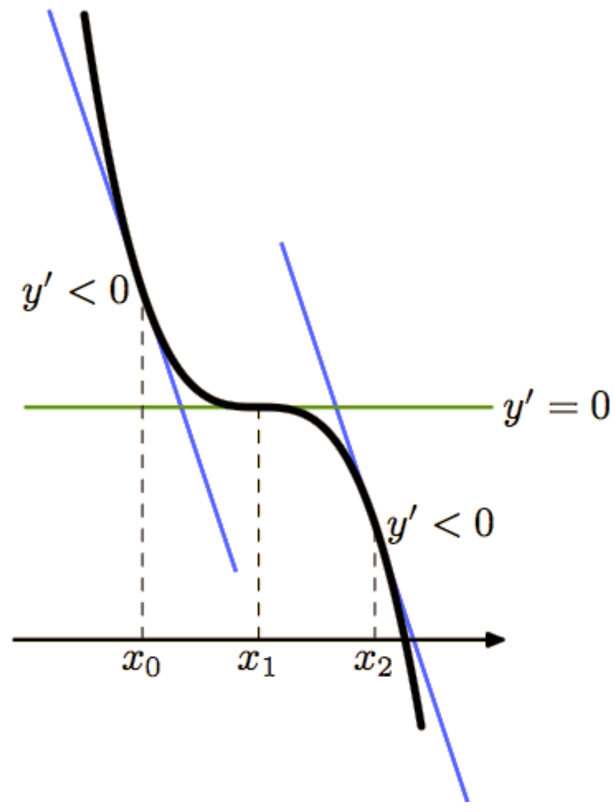


Puntos de inflexión

Cuando la derivada es cero ***y' = 0***, no siempre hay máximo o mínimo, depende como crezca o decrezca a la izquierda y derecha del punto.



	Punto inflexión		
		x_1	
y'	$+$	0	$+$
$y = f(x)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$



	Punto inflexión		
		x_1	
y'	$-$	0	$-$
$y = f(x)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\searrow$

Para determinar si una función tiene o no, máximos o mínimos calculamos los puntos que anulan la derivada y', estudiando a continuación el signo de la misma.

Clasificación Máximos y Mínimos con f'

Sea $f(x)$ una función continua en un punto c:

- Si f' es positiva a la izquierda de c y f' es negativa a la derecha de c, entonces c es un máximo local.

- Si f' es negativa a la izquierda de c y f' es positiva a la derecha de c, entonces c es un mínimo local.

- Si $f'(c) = 0$ y tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de c, entonces **c** es un punto de inflexión.

Ejemplos

1.- Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^2 - 1$.

Solución :

- Hallamos f′ e igualamos a cero.

$$f'(x) = 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores a la izquierda y a la derecha de 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y’		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

En $x = 0$ hay un mínimo.

2.- Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3$

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

- Estudiamos el signo de la derivada

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

La función es siempre creciente.

El punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

3.- Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^4 - 2x^2$

Solución:

- Hallamos ***f'*** e igualamos a cero.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, \ \pm 1$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores

$$f'(-2) = -24 < 0 \qquad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0 \qquad f'(2) = 24 > 0$$

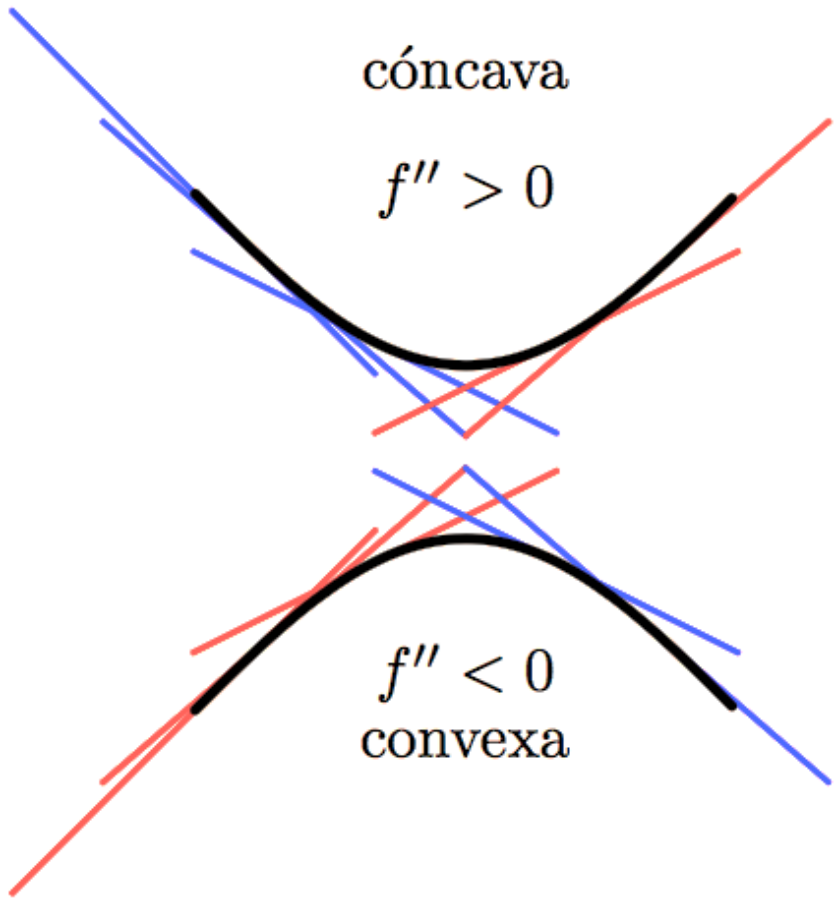
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

- La función es decreciente en (-∞,-1)y (0,1)
- La función es creciente en (-1,0) y (1,∞)
- Hay dos mínimos en m(-1,-1) y m(1,-1)
- Hay un máximo en M(0,0)

IV. La segunda derivada. Concavidad y convexidad

- ***f'' > 0*** nos informa de que ***f'*** es creciente. La curva está por encima de sus tangentes, y decimos que tiene concavidad hacia arriba o que es cóncava.

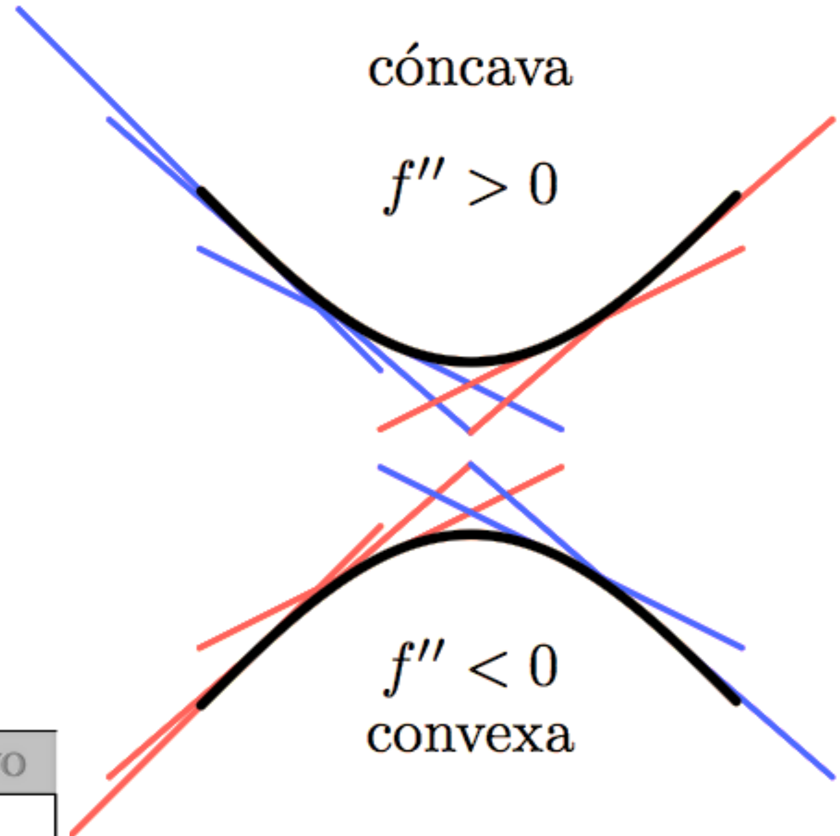
- ***f'' <0*** nos informa de que ***f'*** es decreciente. Esto se traduce, como muestra la figura en que la curva está por debajo de sus tangentes, y decimos que tiene concavidad hacia abajo o que es convexa.



4.1 Clasificación. Máximos y mínimos con f''

Sea $x = a$ un punto donde $f'(a) = 0$, es decir $x = a$ es un posible máximo o mínimo. Si la función admite derivada segunda, el signo de $f''(a)$, determina el tipo de extremo.

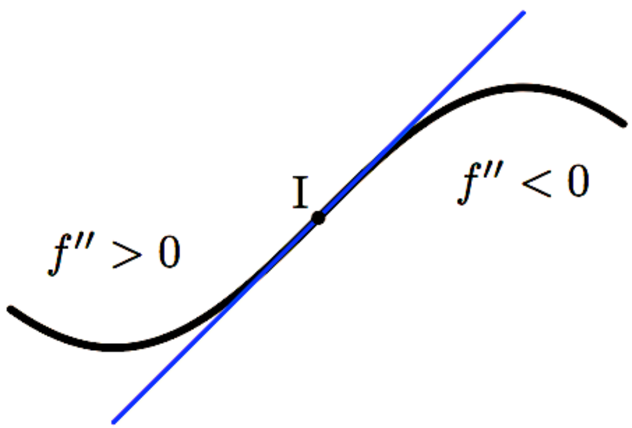
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $x = a$ es un extremo con concavidad hacia arriba, luego es un mínimo relativo.
- ***Si*** $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, $x = a$ es un extremo con concavidad hacia abajo o convexa luego es un máximo relativo.
- En el caso $f''(a) = 0$, no podemos decir si $x=a$ es un máximo o mínimo relativo.

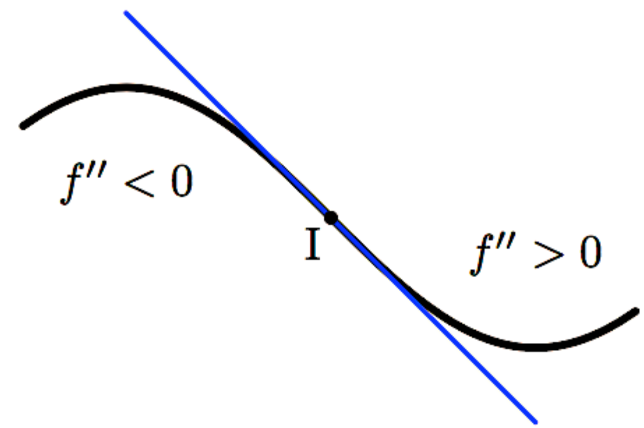


	Mínimo relativo			Máximo relativo		
		$x=a$			$x=a$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\exists f(a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\exists f(a)$	$\searrow$
f''		$f''>0$ Cóncava			$f''<0$ Cóncexa	

4.2. Punto de Inflexión

Cuando en un punto ***(a, f (a))*** la función cambia de concavidad se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.





	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$+$	$(\star)$	$-$
f	$\cup$	$\exists f(a)$	$\cap$

	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$-$	$(\star)$	$+$
f	$\cap$	$\exists f(a)$	$\cup$

Ejemplo 4.1. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función,

$f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Solución:

Hallamos ***f''*** derivando dos veces,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$, $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(0)$	$\cup$	

Punto de inflexión ***$I(0,4)$***

Ejercicios

1.- Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ c) $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ e) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ f) $y = e^x(x-1)$

2.- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y determinar sus máximos y mínimos

a) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$ b) $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

3.- Hallar los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

4.- Estudiar la concavidad y convexidad de las siguientes funciones

a) $y = x^3 - 3x + 4$

b) $y = x^4 - 6x^2$

c) $y = (x - 2)^4$

d) $y = x\, e^x$

e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$

f) $y = ln(x + 1)$

5.- Estudiar si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa x=1

a) $y = 1 + (x - 1)^3$

b) $y = 2 + (x - 1)^4$

c) $y = 3 - (x - 1)^6$

d) $y = -3 + 2(x - 1)^5$