2016

IV$^{\text{O}}$ Medio

Introducción a la Probabilidad
Probabilidad Condicional

Profesor Alberto Alvaradejo Ojeda

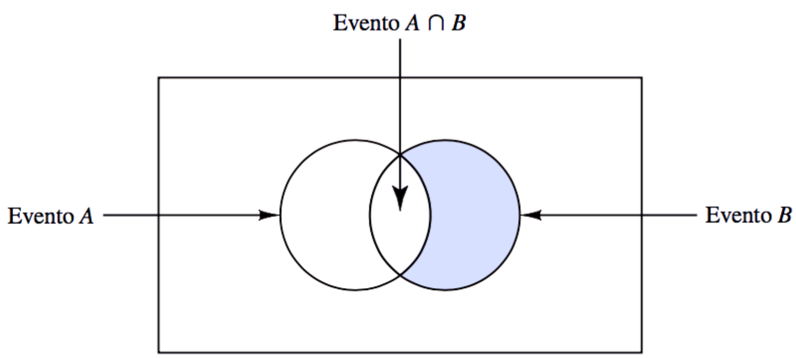
1. Probabilidad condicional

Con frecuencia, en la probabilidad de un evento influye el hecho de que un evento relacionado con él ya haya ocurrido. Supóngase que tiene un evento A cuya probabilidad es $P(A)$. Si se obtiene información nueva y se sabe que un evento relacionado con él, denotado por B, ya ha ocurrido, se deseará aprovechar esta información y volver a calcular la probabilidad del evento A.
A esta nueva probabilidad del evento A se le conoce como **probabilidad condicional** y se expresa $P(A|B)$. *Se lee a probabilidad de A dado B.*

Se define

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Ejemplo, calcular la probabilidad de obtener un 6 al tirar un dado sabiendo que ha salido par.
A=Obtener un 6
B=El número es par
$P(A \cap B) = 1/6$
$P(B) = 3/6 = 1/2$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = 0,333...$$

1.1. Eventos independientes

Si la probabilidad de un evento A no cambia por la existencia del evento B, es decir, si $P(A|B) = P(A)$, entonces los eventos A y B son eventos independientes.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo 1: el jefe de una gasolinera sabe que 80 % de los clientes usan tarjeta de crédito al pagar la gasolina. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos siguientes clientes paguen la gasolina con tarjeta de crédito?

Sean:
A = el primer cliente paga con tarjeta de crédito
B = el segundo cliente paga con tarjeta de crédito

el evento que interesa es $A \cap B$. Si no hay ninguna otra información, se supone que A y B son eventos independientes. Por tanto,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}80 \cdot 0{,}80 = 0,{,}64$$

Ejemplo 2: Se tiene una baraja de 40 cartas, se saca una y se devuelve al mazo. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases? A=primer as
B=segundo as

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

2. Ejercicios

1. La tabla siguiente muestra las probabilidades de los distintos tipos sanguíneo en la población.

	A	**B**	**AB**	**O**
Rh+	0.34	0.09	0.04	0.38
Rh−	0.06	0.02	0.01	0.06

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga sangre tipo O?

   b) ¿De que tenga sangre Rh-?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea Rh- dado que la persona tiene sangre tipo O?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga sangre tipo B dado que es Rh+?

   e) ¿Cuál es la probabilidad de que en un matrimonio, los dos sean Rh-?

   f) ¿Cuál es la probabilidad de que en un matrimonio, los dos tengan sangre AB?

2. El Departamento de Estadística Laboral de Estados Unidos reúne datos sobre las ocupaciones de las personas entre 25 y 64 años. La tabla siguiente presenta el número de hombres y mujeres (en millones) en cada una de las categorías ocupacionales.

Ocupación	**Hombres**	**Mujeres**
Directivo/Profesional	19 079	19 021
Enseñanza/Ventas/ Administrativo	11 079	19 315
Servicio	4 977	7 947
Producción con precisión	11 682	1 138
Operadores/Obrero	10 576	3 482
Agricultura/Ganadería/Silvicultura/Pesca	1 838	514

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador mujer sea directivo o profesional?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador hombre esté en producción con precisión?

   c) ¿Es la ocupación independiente del género? Justifique su respuesta con el cálculo de la probabilidad.

3. Reggie Miller de los Indiana Pacers tiene el record de la National Basketball Association de más canastas de 3 puntos anotadas en toda una carrera, acertando en 85 % de sus tiros (USA Today, 22 de enero de 2004). Suponga que ya casi al final de un juego cometen una falta contra él y le conceden dos tiros.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en los dos tiros?

   b) ¿De que acierte en por lo menos uno de los dos tiros?

c) ¿De que no acierte en ninguno de los dos tiros?

d) Al final de un juego de básquetbol suele ocurrir que cometan faltas contra un jugador del equipo opuesto para detener el reloj del juego. La estrategia usual es cometer una falta contra el peor tirador del otro equipo. Suponga que el centro de los Indiana Pacers acierta 58 % de sus tiros. Calcule para él las probabilidades calculadas en los incisos a, b y c y muestre que hacer una falta intencional contra el centro de los Indiana Pacers es mejor que hacerlo contra Reggie Miller.

4. Visa Card de Estados Unidos estudia con qué frecuencia usan sus tarjetas (de débito y de crédito) los consumidores jóvenes, entre 18 y 24 años. Los resultados del estudio proporcionan las probabilidades siguientes.

   - La probabilidad de que un consumidor use su tarjeta al hacer una compra es 0,37.
   - Dado que un consumidor usa su tarjeta, la probabilidad de que tenga entre 18 y 24 años es 0,19.
   - Puesto que un consumidor usa su tarjeta, la probabilidad de que sea mayor de 24 años es 0,81.

   Datos de la Oficina de Censos de Estados Unidos indican que 14 % de los consumidores tienen entre 18 y 24 años.

   a) Ya que un consumidor tiene entre 18 y 24 años, ¿cuál es la probabilidad de que use su tarjeta?

   b) Dado que un consumidor tiene más de 24 años, ¿cuál es la probabilidad de que use su tarjeta?

   c) ¿Qué interpretación se le da a las probabilidades de los puntos a y b?

   d) ¿Empresas como Visa, Master Card y Discover deben proporcionar tarjetas a los consumidores entre 18 y 24 años, antes de que tengan una historia crediticia? Si no, explique. Si esta de acuerdo, ¿qué restricciones deben poner las empresas a estos consumidores?

5. En un estudio de Morgan Stanley Consumer Research se muestrearon hombres y mujeres y se les preguntó qué preferían tomar: agua de botella o una bebida deportiva como Gatorade o Propel Fitness (The Atlanta Journal-Constitution, 28 de diciembre de 2005). Suponga que en el estudio hayan participado 200 hombres y 200 mujeres y que de todos 280 hayan preferido el agua de botella. En el grupo de los que preferían bebidas deportivas, 80 eran hombres y 40 eran mujeres. Sea:

   M=el evento el consumidor es hombre
   W=el evento el consumidor es mujer
   B=el evento el consumidor prefiere agua de botella
   S=el evento el consumidor prefiere una bebida deportiva

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en este estudio una persona prefiera agua de botella?

b) ¿De que en este estudio una persona prefiera una bebida deportiva?

c) ¿Cuáles son las probabilidades condicionales $P(M|S)$ y $P(W|S)$?

d) ¿Cuáles son las probabilidades conjuntas $P(M \cap S)$ y $P(W \cap S)$?

e) Dado que un consumidor es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera una bebida deportiva?

f) Ya que un consumidor es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera una bebida deportiva?

g) ¿Depende la preferencia por una bebida deportiva de que el consumidor sea hombre o mujer? Explique usando la información sobre las probabilidades.