2016

IV° Medio

Introducción a la Probabilidad
Eventos

Profesor Alberto Alvaradejo Ojeda

1. Evento o Suceso

Se llama evento o suceso a todo subconjunto de un espacio muestral. También se define como una colección de puntos muestrales.

Por ejemplo en el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del lanzamiento de un dado, los siguientes son eventos:

1. Obtener un número primo $A = \{2, 3, 5\}$
2. Obtener un número primo y par $B = \{2\}$
3. Obtener un número mayor o igual a 5 $C = \{5, 6\}$

1.1. Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir en forma simultánea, esto es, si y sólo si su intersección es vacía.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado los eventos $B = \{2\}$ y $C = \{5, 6\}$ son mutuamente excluyentes por que la intersección es vacía, $B \cap C = \varnothing$

1.2. Probabilidad clásica

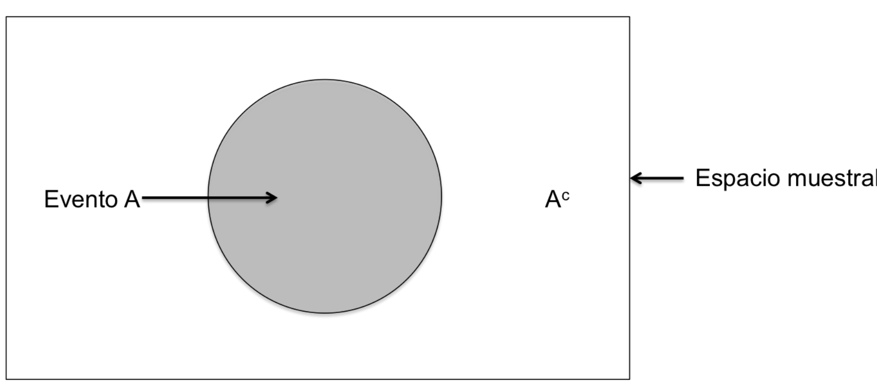
Si en un experimento aleatorio todos los resultados son equiprobables, es decir, la ocurrencia de uno es igualmente posible que la ocurrencia de cualquiera de los demás, entonces, la probabilidad de un evento A es:

$$P(A) = \frac{\text{Números de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

A partir de esta definición las probabilidades de los posibles resultados del experimento se pueden determinar a "*priori*", es decir, sin realizar el experimento.

1.3. Complemento de un evento o suceso

Dado un evento A, el complemento de A se define como el evento que consta de todos los puntos muestrales que no están en A. El complemento de A se denota A^c.



Despejando $P(A)$, se obtiene:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Esto indica que la probabilidad de un evento A se puede calcular si se conoce la probabilidad de su complemento, $P(A^c)$.

Por ejemplo, considere el caso de un administrador de ventas que, después de revisar los informes de ventas, encuentra que 80 % de los contactos con clientes nuevos no producen ninguna venta. Si A denota el evento hubo venta y A^c el evento no hubo venta, el administrador tiene que $P(A^c) = 0{,}80$.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$

la probabilidad de una venta en el contacto con un cliente nuevo es 0,20.

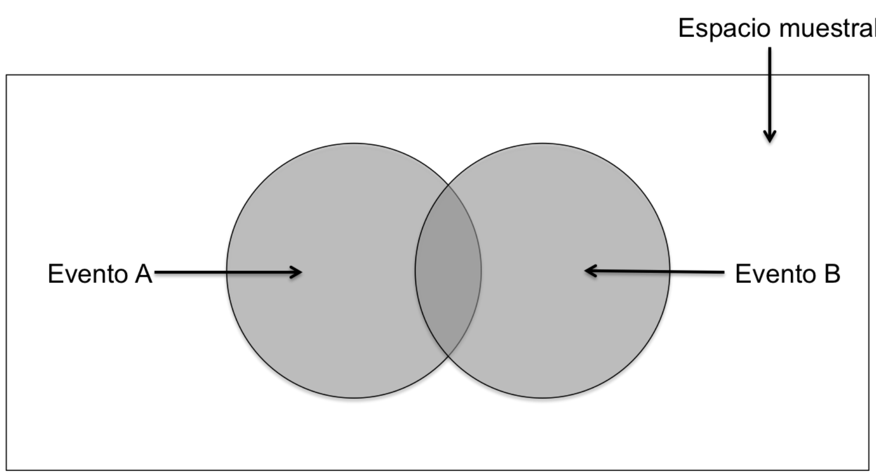
1.4. Ley de adición

La ley de la adición sirve para determinar la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de dos eventos. Es decir, si A y B son eventos, nos interesa hallar la probabilidad de que ocurra el evento A o el B o ambos.

Antes de continuar la ley de la adición es necesario ver dos conceptos relacionados con la combinación de eventos: la **unión** y la **intersección** de eventos.

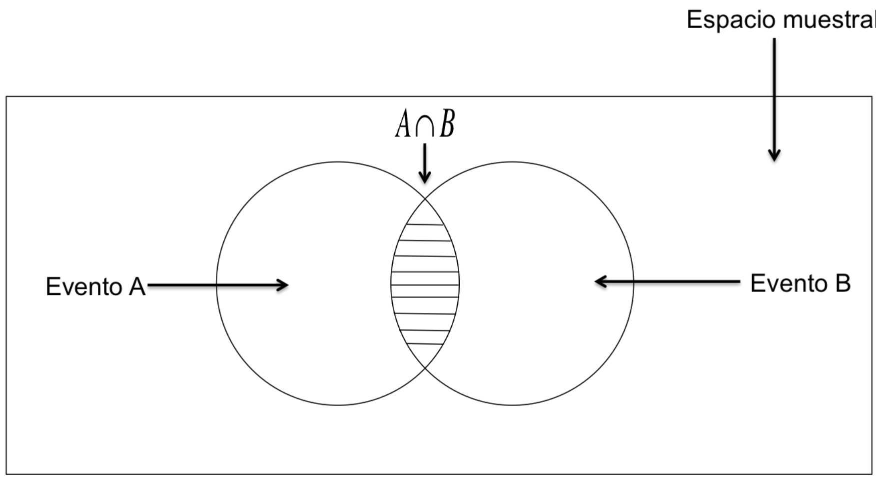
1.4.1. Unión de dos eventos

La unión de A y B es el evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen a A o a B o a ambos. La unión se denota $A \cup B$.



1.4.2. Intersección de dos eventos

Dados dos eventos A y B, la intersección de A y B es el evento que contiene los puntos muestrales que pertenecen **solo** a A y a B.



1.5. Ley de la adición

La ley de la adición proporciona una forma de calcular la probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B o ambos. En otras palabras, la ley de la adición se emplea para calcular la probabilidad de la unión de los dos eventos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para que logre un entendimiento intuitivo de la ley de la adición, observe que en la ley de la adición, los dos primeros términos $P(A) + P(B)$, corresponden a los puntos muestrales en $A \cup B$. Pero, como los puntos muestrales que se encuentran en la intersección $A \cap B$ están tanto en A como en B, cuando se calcula $P(A) + P(B)$, los puntos que se encuentran en $A \cap B$ cuentan dos veces. Esto se corrige restando $P(A \cap B)$.
Ejemplo: considere el caso de una pequeña empresa de ensamblaje en la que hay 50 empleados. Se espera que todos los trabajadores terminen su trabajo a tiempo y que pase la inspección final. A veces, alguno de los empleados no satisface el estándar de desempeño, ya sea porque no termina a tiempo su trabajo o porque no ensambla bien una pieza. Al final del periodo de evaluación del desempeño, el jefe de producción encuentra que 5 de los 50 trabajadores no terminaron su trabajo a tiempo, 6 de los 50 trabajadores ensamblaron mal una pieza y 2 de los 50 trabajadores no terminaron su trabajo a tiempo y armaron mal una pieza.

$$L = \text{No se terminó el trabajo a tiempo}$$

$$L = \text{Se armó mal la pieza}$$

Tenemos:

$$P(L) = \frac{5}{50} = 0{,}10$$

$$P(D) = \frac{6}{50} = 0{,}12$$

$$P(L \cap D) = \frac{2}{50} = 0{,}04$$

Después de analizar los datos del desempeño, el jefe de producción decide dar una calificación baja al desempeño de los trabajadores que no terminaron a tiempo su trabajo o que armaron

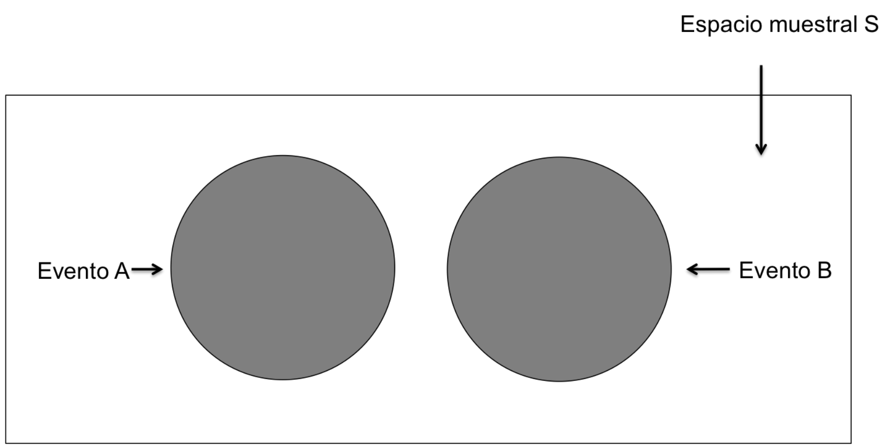
mal alguna pieza; por tanto, el evento de interés es LD. ¿Cuál es la probabilidad de que el jefe de producción dé a un trabajador una calificación baja de desempeño?
Observe que esta pregunta sobre probabilidad se refiere a la unión de dos eventos. En concreto, se desea hallar $P(L \cup D)$

$$P(L \cup D) = P(L) + P(D) - P(L \cap D)$$
$$P(L \cup D) = 0{,}10 + 0{,}12 - 0{,}04 = 0{,}18$$

La probabilidad de que un empleado elegido al azar obtenga una calificación baja por su desempeño es 0,18

1.6. Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si no tienen puntos muestrales en común.
Los eventos A y B son mutuamente excluyentes si, cuando un evento ocurre, el otro no puede ocurrir. Por tanto, para que A y B sean mutuamente excluyentes, se requiere que su intersección no contenga ningún punto muestral.



1.7. Ley de la adición para eventos mutuamente excluyentes

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2. Ejercicios

1. Suponga que tiene un espacio muestral con cinco resultados experimentales que son igualmente posibles: E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5. Sean:

$$A = \{E_1, E_2\}$$

$$B = \{E_3, E_4\}$$

$$C = \{E_2, E_3, E_5\}$$

   a) Determine $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.
   b) Calcule $P(A \cup B)$. ¿A y B son mutuamente excluyentes?
   c) Determine A^c, C^c, $P(A^c)$ y $P(C^c)$.
   d) Halle $A \cup B^c$ y $P(A \cup B^c)$.
   e) Halle $P(B \cup C)$.

2. Suponga que se tiene el espacio muestral $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$, donde $E_1, E_2, \cdots, E_7$ denotan puntos muestrales. La asignación de probabilidades es la siguiente: $P(E_1) =$ 0,05,$P(E_2) =$ 0,20, $P(E_3) =$ 0,20, $P(E_4) =$ 0,25, $P(E_5) =$ 0,15, $P(E_6) =$ 0,10, $P(E_7) =$ 0,05. Sea:

$$A = \{E_1, E_4, E_6\}$$

$$B = \{E_2, E_4, E_7\}$$

$$C = \{E_2, E_3, E_5, E_7\}$$

   a) Determine $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$.
   b) Encuentre $A \cup B$ y $P(A \cup B)$.
   c) Halle $A \bigcap B$ y $P(A \bigcap B)$.
   d) ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?
   e) Determine B^c y $P(B^c)$

3. Las autoridades de Clarkson University realizaron un sondeo entre sus alumnos para conocer su opinión acerca de su universidad. Una pregunta fue si la universidad no satisface sus expectativas, si las satisface o si supera sus expectativas. Encontraron que 4 % de los interrogados no dieron una respuesta, 26 % respondieron que la universidad no llenaba sus expectativas y 56 % indicó que la universidad superaba sus expectativas.

   a) Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad supera sus expectativas?
   b) Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad satisface o supera sus expectativas?

4. La Oficina de Censos de Estados Unidos cuenta con datos sobre la cantidad de adultos jóvenes, entre 18 y 24 años, que viven en casa de sus padres.

   M=el evento adulto joven que vive en casa de sus padres
   F=el evento adulta joven que vive en casa de sus padres

   Si toma al azar un adulto joven y una adulta joven, los datos de dicha oficina permiten concluir que $P(M) = 0{,}56$ y $P(F) = 0{,}42$ (The World Almanac, 2006). La probabilidad de que ambos vivan en casa de sus padres es 0,24.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de dos adultos jóvenes seleccionados viva en casa de sus padres?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos adultos jóvenes seleccionados vivan en casa de sus padres?