2016

IV^{O} Medio

Introducción a la Probabilidad

Profesor Alberto Alvaradejo Ojeda

1. Probabilidad

La probabilidad es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados. Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1. Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas. Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento.

1.1. Experimentos, reglas de conteo y asignación de probabilidades

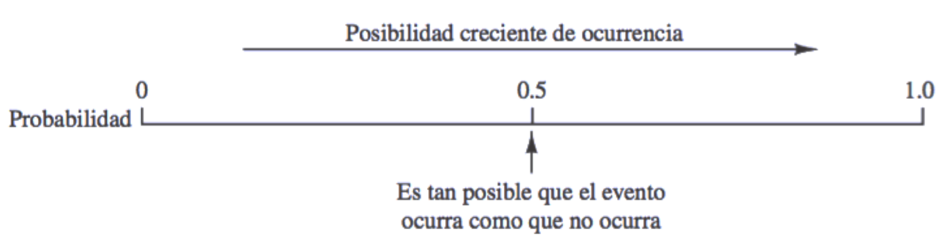
En el contexto de la probabilidad, un experimento es definido como un proceso que genera resultados definidos. Y en cada una de las repeticiones del experimento, habrá uno y sólo uno de los posibles resultados experimentales.

Experimento	**Resultado experimental**
Lanzar una moneda	Cara, Sello
Tomar una pieza para inspección	Con defecto, sin defecto
Realizar una llamada de ventas	Hay compra, no hay compra
Lanzar un dado	1,2,3,4,5,6
Jugar un partido de fútbol	Ganar, empatar, perder

Al especificar todos los resultados experimentales posibles, está definiendo el espacio muestral de un experimento.

1.2. Espacio Muestral

El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los resultados experimentales.



2. Reglas de conteo, combinaciones y permutaciones

2.1. Experimentos de pasos múltiples

La primera regla de conteo sirve para experimentos de pasos múltiples. Considere un experimento que consiste en lanzar dos monedas. Defina los resultados experimentales en términos de las caras y sellos que se observan en las dos monedas.

$$E = \{(C, C); (C, S); (S, C); (S, S,)\}$$

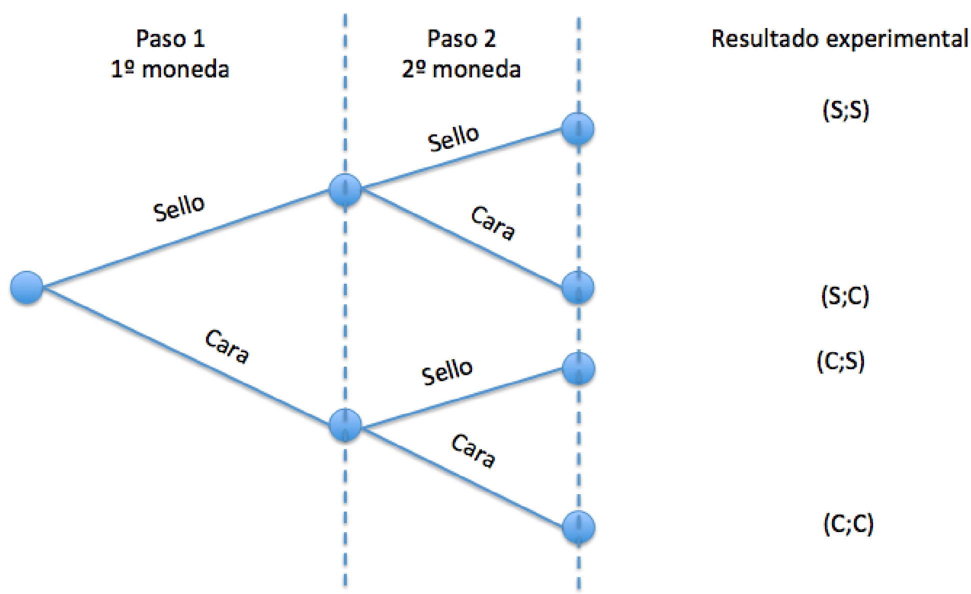
Por tanto, hay cuatro resultados experimentales. En este caso es fácil enumerar todos los resultados experimentales.

2.2. Regla de conteo de pasos múltiples

Un experimento se describe como una sucesión de k pasos en los que hay n_1 resultados posibles en el primer paso, n_2 resultados posibles en el segundo paso y así en lo sucesivo, entonces el número total de resultados experimentales es $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

- En el problema de las monedas hay $2 \cdot 2$ monedas $= 4$ resultados distintos.
- El número de resultados experimentales de seis monedas es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

2.3. Diagrama de árbol para el lanzamiento de dos monedas



2.4. Combinaciones

Permite contar el número de resultados experimentales cuando el experimento consiste en seleccionar n objetos de un conjunto (usualmente mayor) de N objetos.
El número de combinaciones de N objetos tomados de n en n es:

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Donde

$$N! = N(N-1)(N-2)\cdots 2\cdot 1$$
$$N! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

Por definición

$$0! = 1$$

Ejemplo: Un inspector de calidad selecciona al azar dos de cinco piezas para probar que no tengan defectos. En un conjunto de cinco partes, ¿cuántas combinaciones de dos partes pueden seleccionarse?

$$N = 5;\ n = 2$$

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{120}{12} = 10$$

Si se etiqueta dichas partes como A, B, C, D y E, las 10 combinaciones o resultados experimentales serán

$$AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$$

Ejemplo: considere la lotería de Florida (USA) en la que se seleccionan seis números de un conjunto de 53 números para determinar al ganador de la semana. Para establecer las distintas variables en la selección de seis enteros de un conjunto de 53, se usa la regla de conteo para combinaciones.

$$N = 53;\ n = 6$$

$$\mathrm{C}_6^{53} = \binom{53}{6} = \frac{53!}{6!(53-6)!} = \frac{53!}{6!47!} = \frac{53\cdot 52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot \cancel{47!}}{6!\cdot \cancel{47!}} = \frac{53\cdot 52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\mathrm{C}_6^{53} = \binom{53}{6} = 22.957.480$$

La regla de conteo para combinaciones arroja casi 23 millones de resultados experimentales en esta lotería. Si una persona compra un boleto de lotería, tiene una en 22.957.480 posibilidades de ganar la lotería.

2.5. Permutaciones

La tercera regla de conteo que suele ser útil, es para permutaciones. Dicha regla permite calcular el número de resultados experimentales cuando se seleccionan n objetos de un conjunto de N objetos y el orden de selección es relevante. Los mismos n objetos seleccionados en orden diferente se consideran un resultado experimental diferente.
El número de permutaciones de N objetos tomados de n es n está dado por:

$$P_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

La regla de conteo para permutaciones tiene relación estrecha con la de combinaciones; sin embargo, con el mismo número de objetos, el número de permutaciones que se obtiene en un experimento es mayor que el número de combinaciones, ya que cada selección de n objetos se ordena de $n!$ maneras diferentes.
Ejemplo: Tomando el ejemplo anterior del proceso de control de calidad en el que un inspector selecciona dos de cinco piezas para probar que no tienen defectos. ¿Cuántas permutaciones puede seleccionar?

$$P_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 20$$

Si las piezas se etiquetan A, B, C, D y E, las 20 permutaciones son:

$AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE, ED$

3. Asignación de probabilidades

Los tres métodos comúnmente usados son el método clásico, el método de la frecuencia relativa y el método subjetivo.

3.1. Requerimientos básicos para la asignación de probabilidades

1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1.

$$0 \leq P(E_i) \leq 1$$

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots P(E_n) = 1$$

3.2. Método clásico

Este es apropiado cuando todos los resultados experimentales tienen la misma posibilidad. Si existen n resultados experimentales, la probabilidad asignada a cada resultado experimental es $\frac{1}{n}$.
Por ejemplo, considere el experimento del lanzamiento de una moneda, los dos resultados experimentales —cara o sello — tienen la misma posibilidad.
Como uno de los dos resultados igualmente posibles es cara, la probabilidad de que caiga cara es $\frac{1}{2}$ o $0,50$. Asimismo, la probabilidad de que caiga sello también es $\frac{1}{2}$ o $0,50$.

3.3. Método de frecuencia relativa

Este método es el más conveniente para la asignación de probabilidades cuando existen datos para estimar la proporción de veces que se presentarán los resultados si el experimento se repite muchas veces.
Por ejemplo un estudio sobre los tiempos de espera en el departamento de rayos x de un hospital pequeño. Durante 20 días sucesivos un empleado registra el número de personas que están esperando el servicio a las 9:00 a.m.; los resultados son los siguientes.

Nº Personas	**Días**	**Frec. Rel.**
0	2	0,10
1	5	0,25
2	6	0,30
3	4	0,20
4	3	0,15
Total	20	

Con el método de la frecuencia relativa, la probabilidad que se le asignará al resultado experimental cero pacientes esperan el servicio, será de 0,10

3.4. Método subjetivo

El método subjetivo de asignación de probabilidades es el más indicado cuando no es factible suponer que todos los resultados de un experimento sean igualmente posibles y, además, cuenta con pocos datos relevantes.
Este método usa toda la información disponible, por ejemplo, la propia experiencia o la intuición. Después de considerar dicha información se asigna un valor de probabilidad que expresa el grado de confianza (en una escala de 0 a 1) que tiene acerca de que un resultado experimental ocurra.

Ejemplo: Considere el caso en el que Tomás y Francisca hacen una oferta para la compra de una casa. Hay dos resultados posibles:

- E_1 = su oferta será aceptada
- E_2 = su oferta no será aceptada

Francisca cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es $0,8$; por tanto, Francisca establece que $P(E_1)$=$0,8$ y $P(E_2) = 0,2$; Tomás, por su parte, cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es $0,6$; por tanto, Tomás establecerá $P(E_1) = 0,6$ y $P(E_2) = 0,4$.

4. Ejercicios

1. Un experimento consta de tres pasos; para el primer paso hay tres resultados posibles, para el segundo hay dos resultados posibles y para el tercer paso hay cuatro resultados posibles. ¿Cuántos resultados distintos hay para el experimento completo?

2. ¿De cuántas maneras es posible seleccionar tres objetos de un conjunto de seis objetos? Use las letras A, B, C, D, E y F para identificar a los objetos y enumere todas las combinaciones diferentes de tres objetos.

3. ¿Cuántas permutaciones de tres objetos se pueden seleccionar de un grupo de seis objetos? Use las letras A, B, C, D, E y F para identificar a los objetos y enumere cada una de las permutaciones factibles para los objetos B, D y F.

4. Considere el experimento de lanzar una moneda tres veces.

   a) Elabore un diagrama de árbol de este experimento.

   b) Enumere los resultados del experimento.

   c) ¿Cuál es la probabilidad que le corresponde a cada uno de los resultados?

5. Suponga que un experimento tiene cinco resultados igualmente posibles: E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5. Asigne probabilidades a los resultados y muestre que satisfacen los requerimientos.

6. Un experimento que tiene tres resultados es repetido 50 veces y se ve que E_1 aparece 20 veces, E_2 13 veces y E_3 17 veces. Asigne probabilidades a los resultados. ¿Qué método empleó?.

7. La persona que toma las decisiones asigna las probabilidades siguientes a los cuatro resultados de un experimento: $P(E_1) = 0{,}10$, $P(E_2) = 0{,}15$, $P(E_3) = 0{,}40$ y $P(E_4) = 0{,}20$. ¿Son válidas estas asignaciones de probabilidades? Argumente.

8. En una ciudad las solicitudes de cambio de uso de suelo pasan por un proceso de dos pasos: una revisión por la comisión de planeación y la decisión final tomada por el consejo de la ciudad. En el paso 1 la comisión de planeación revisa la solicitud de cambio de uso de suelo y hace una recomendación positiva o negativa respecto al cambio. En el paso 2 el consejo de la ciudad revisa la recomendación hecha por la comisión de planeación y vota para aprobar o desaprobar el cambio de suelo. Suponga que una empresa dedicada a la construcción de complejos departamentales presenta una solicitud de cambio de uso de suelo. Considere el proceso de la solicitud como un experimento. ¿Cuántos puntos muestrales tiene este experimento? Enumérelos. Construya el diagrama de árbol del experimento.

9. El capital de riesgo es una fuerte ayuda para los fondos disponibles de las empresas. De acuerdo con Venture Economics (Investor's Business Daily, 28 de abril de 2000) de 2.374 desembolsos en capital de riesgo, 1.434 son de empresas en California, 390 de empresas en Massachussets, 217 de empresas en Nueva York y 112 de empresas en Colorado. Veintidós por ciento de las empresas que reciben fondos se encuentran en

las etapas iniciales de desarrollo y 55 % en la etapa de expansión. Suponga que desea tomar en forma aleatoria una de estas empresas para saber cómo son usados los fondos de capital de riesgo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa que seleccione sea de California?

b) ¿De que la empresa no sea de ninguno de los estados citados?

c) ¿De que la empresa elegida no se encuentre en las etapas iniciales de desarrollo?

d) Si admite que las empresas en las etapas iniciales de desarrollo tuvieran una distribución homogénea en todo el país, ¿cuántas empresas de Massachussets que reciben fondos de capital de riesgo se encuentran en las etapas iniciales de desarrollo?

e) La cantidad total de fondos invertidos es $32,4 mil millones. Estime la cantidad destinada a Colorado.