Distribución Binomial

Profesor
Alberto Alvaradejo Ojeda

1 de octubre de 2015

1. Distribución Binomial

La distribución binomial es unas de las distribuciones de probabilidad discreta más importantes. Recordemos que en una distribución de probabilidad discreta, la variable aleatoria asigna un valor numérico a cada resultado en el espacio muestral del experimento. La distribución binomial tiene que ver con una clase especial de experimento llamado experimento binomial.

1.1. Experimento binomial

Un experimento que tiene exactamente dos posibles resultados o dos categorías de resultados conocidos como ”éxito”ó ”fracaso”.

Ejemplo 1.1 *Experimento: Lanzar una moneda.*
El experimento tiene solamente dos resultados (C,S), por lo tanto es un experimento binomial.

Ejemplo 1.2 *Experimento: Probando una nueva droga contra una enfermedad.*
La droga cura (éxito) o no cura (fracaso) la enfermedad. Por lo tanto es un experimento binomial.

Ejemplo 1.3 *Experimento: Un jugador gana si obtiene un número mayor que 4 y pierde si obtiene cualquier otro número en el lanzamiento de un dado.*
Los resultados del experimento (lanzar un dado) se puede poner en una de dos categorías: $\{5, 6\}$ *y* $\{1, 2, 3, 4\}$. *Los resultados en la primera categoría se definen como ”éxito” y los resultados en la segunda categoría se definen como ”fracaso”.*

1.2. Proceso Bernoulli

Digamos que la variable aleatoria (x) es la cantidad de éxitos. Contar la cantidad de éxitos en un intento de un experimento binomial no es muy interesante debido a que la variable aleatoria (x) puede asumir solamente dos (1, 0) posibles valores. Supongamos que repetimos un experimento binomial siguiendo un procedimiento especial llamado proceso Bernoulli.

1.2.1. Definición

Un experimento binomial se repite tal que:

1. La probabilidad de éxito es igual para cada intento del experimento.

2. Los resultados del los intentos son independientes entre sí.

Si un experimento binomial se repite n veces según un proceso Bernoulli, entonces la variable aleatoria (x) puede asumir los valores $0, 1, 2, ..., n$.
La distribución de probabilidad de la variable aleatoria (número de éxitos) (x) se llama distribución binomial.
Para definir completamente esta distribución se debe completar una tabla, o describir la distribución con una fórmula. La fórmula utiliza notación, factorial.

1.2.2. Factorial

El producto $n(n–1)(n–2)..,2 \cdot 1$ se representa como $n!$ y se lee como el factorial de n.

a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot\ 1 = 6$

b) $8! = 8 \cdot 7 \cdot\ 6 \cdot 5 \cdot\ 4 \cdot 3 \cdot\ 2 \cdot 1 = 40{,}320$

c) $1! = 1$

d) $0! = 1$

1.2.3. Combinaciones

Combinaciones de k elementos de un total de n: se usan para determinar el número de grupos de k elementos que pueden formarse con n elementos. Se denota:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.2.4. Formula de la Distribución Binomial

La función de probabilidad de la distribución binomial, también denominada función de la distribución de Bernoulli, es:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

donde:
n es el número de pruebas
k es el número de éxitos
p es la probabilidad de éxito
$1 - p$ es la probabilidad de fracaso

Ejemplo 1.4 *Si una moneda se lanza 15 veces, encuentre la probabilidad de obtener exactamente 10 caras.*
El lanzar una moneda es un experimento binomial. Dado que nos interesa contar el número de caras. El número de éxitos será la variable aleatoria (x).
$n = 15$
$k = 10$
$p = 0,5$
$1 - p = 0,5$

$$P(10) = \frac{15!}{10!(15-10)!} \cdot 0,5^{10} \cdot (1 - 0,5)^{15-10}$$

$$P(10) = \frac{15!}{10!(5)!} \cdot 0,5^{10} \cdot (0,5)^5 = 0{,}0916$$

aproximadamente un 9 % *de oportunidad.*

Ejemplo 1.5 *En un grupo de 20 alumnos se ha comprobado que cada uno de ellos falta a clase el 5 % de los días. Calcula la probabilidad de que un día determinado:*

$$X : \textit{nro. de faltas} \rightarrow B(20; 0,05)$$

a) *No se registre ninguna ausencia.*
$n = 20$
$k = 0$
$p = 0,05$
$1 - p = 0,95$

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} 0,05^0 \cdot 0,95^{20} = 0,358$$

b) *Falten a clase más de cinco alumnos.*

$$(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)]$$
$$= 1 - [\binom{20}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{18} +$$

$$\binom{20}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^{17} + \binom{20}{4} \cdot 0,05^4 \cdot 0,95^{16} + \binom{20}{5} \cdot 0,05^5 \cdot 0,95^{15}] = 1 - 0,99918 = 0,00082$$

c) *No asista a clase nadie*

$$P(X = 20) = \binom{20}{20} \cdot 0,05^{20} \cdot 0,95^0 = 9,5 \cdot 10^{-27}$$

d) *Falten menos de tres.*

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$
$$\binom{20}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{18} = 0,358 + 0,378 + 0,189 = 0,924$$

Ejemplo 1.6 *Mauricio trabaja en una compañía de seguros. Él, cada día tiene que lograr vender 7 o más seguros. La probabilidad de que lo haga es de un 45 %. Si las ventas de cada día son independientes de las ventas de los días anteriores, determinar:*

a) *¿Cuál es la probabilidad que exactamente 15 días de un total de 20 días del mes de mayo logre su meta?*
$n = 20$, *total de experimentos*
$k = 15$, *número de éxitos*
$p = 0,45$, *probabilidad de éxito*
$1 - p = 0,55$, *probabilidad de fracaso*

$$P(15) = \binom{20}{15} \cdot 0,45^{15} \cdot 0,55^5 \approx 0,005 \approx 0,5\,\%$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo en tres días no logre la meta?
En este caso, la probabilidad de éxito cambia, pues lo que se quiere es que no logre la meta en ningún día o en un día o en dos días o en tres días. Por lo tanto:
$n = 20$*, total de experimentos*
$k = 0, 1, 2, 3$*, número de éxitos*
$p = 0,55$*, probabilidad de éxito*
$1 - p = 0,45$*, probabilidad de fracaso*

$$P(k \leqslant 3) = \binom{20}{0} \cdot 0,55^0 \cdot 0,45^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,55^1 \cdot 0,45^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,55^2 \cdot 0,45^{18}$$
$$P(k \leqslant 3) \approx 1,16 \cdot 10^{-7} + 2,83 \cdot 10^{-6} + 3,29 \cdot 10^{-5}$$
$$P(k \leqslant 3) \approx 3,5846 \cdot 10^{-5} \approx 0,0035846\,\%$$

Ejemplo 1.7 *La probabilidad de éxito de una determinada vacuna es* $72\,\%$*. Calcular la probabilidad de que una vez administrada a 15 pacientes:*

a) Ninguno sufra la enfermedad
$n = 15$*, total de experimentos*
$k = 15$*, número de éxitos*
$p = 0,72$*, probabilidad de éxito*
$1 - p = 0,0,28$*, probabilidad de fracaso*

$$P(15) = \binom{15}{15} \cdot (0,72)^{15} \cdot (0,28)^0 \approx 0,007244 \approx 0,72\,\%$$

b) Todos sufran la enfermedad
$n = 15$*, total de experimentos*
$k = 0$*, número de éxitos*
$p = 0,72$*, probabilidad de éxito*
$1 - p = 0,0,28$*, probabilidad de fracaso*

$$P(0) = \binom{15}{0} \cdot (0,72)^0 \cdot (0,28)^{15} \approx 5,09766 \cdot 10^9$$

c) Dos de ellos contraigan la enfermedad
$n = 15$*, total de experimentos*
$k = 2$*, número de éxitos*
$p = 0,28$*, probabilidad de éxito*
$1 - p = 0,0,72$*, probabilidad de fracaso*

$$P(2) = \binom{15}{2} \cdot (0,28)^2 \cdot (0,72)^{13} \approx 0,115030 \approx 11,50\,\%$$

2. Ejercicios

1. La probabilidad de que un paciente se recupere de una extraña enfermedad es 0,4. Si se sabe que 15 personas contraen esa enfermedad:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan al menos 10?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan de 3 a 8?

2. En ciudad la necesidad de dinero para comprar drogas se establece como la razón del 75 % de los robos. Encuentre la probabilidad de que entre los siguientes cinco casos de robo:

   a) Dos resulten de la necesidad de dinero para comprar drogas

   b) Al menos tres resulten de la necesidad de dinero para comprar drogas.

3. De acuerdo por un estudio publicado por un grupo de sociólogos de la universidad de Massachussets aproximadamente el 60 % de los consumidores de valium en el estado de Massachussets tomaron valium por primera vez debido a problemas psicológicos. Encuentre la probabilidad de que entre los siguientes ocho consumidores entrevistados en este estado:

   a) Tres comenzaron a tomar valium por problemas psicológicos.

   b) Al menos cinco comenzaron a consumir Valium por problemas que no fueron psicológicos.

4. De acuerdo a una encuesta a nivel nacional en Estados Unidos de la universidad de Michigan a estudiantes universitarios de último año revela que el 70 % de los estudiantes desaprueba el consumo diario de la marihuana. Si se seleccionan doce estudiantes al azar y se les pide su opinión, encuentre la probabilidad de que el número de los que desaprueban fumar marihuana todos los días sea:

   a) Entre siete y nueve.

   b) A lo más cinco.

   c) No menos de ocho

5. Un estudio examinó las actitudes hacia los antidepresivos. El estudio reveló que aproximadamente el 70 % cree que "los antidepresivos en realidad no curan nada, sólo encubren el problema real". De acuerdo con este estudio:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres de las siguientes cinco personas seleccionadas al azar sean de esta opinión?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que desde tres personas de las siguientes cinco seleccionadas al azar sean de esta opinión?

6. Una determinada raza de perros tiene cuatro cachorros en cada camada. Si la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0,55, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que, en una camada dos exactamente sean hembras.

b) Calcular la probabilidad de que, en una camada al menos dos sean hembras.