# Variables Aleatorias Discretas

Profesor
Alberto Alvaradejo Ojeda

9 de septiembre de 2015

# Índice

# 1. Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una variable que toma valores numéricos determinados por el resultado de un experimento aleatorio. No hay que confundir la variable aleatoria con sus posibles valores.

**Ejemplo 1.1** *Nº de caras al lanzar 6 veces una moneda (valores: 0, 1, 2...)*

**Ejemplo 1.2** *Nº de llamadas que recibe un teléfono en una hora*

**Ejemplo 1.3** *Tiempo que esperan los clientes para pagar en un supermercado...*

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas:

## 1.1. Discretas

El conjunto de posibles valores es numerable. Suelen estar asociadas a experimentos en que se mide el número de veces que sucede algo. Puede tomar valores finitos o contables.

## 1.2. Continuas

Es aquella cuyos valores son un intervalo, o una unión de intervalos sobre la recta de los números reales. Por lo tanto, puede tomar $\infty$ valores.

## 1.3. Función de probabilidades

Es aquella función que asocia a cada elemento del espacio muestral $(x)$ de una variable aleatoria $(X)$ la probabilidad que éste tenga.

$$f(x) = \mathbb{R} \rightarrow [0,1]\,, \text{ tal que} f(x) = P(x) \tag{1.1}$$

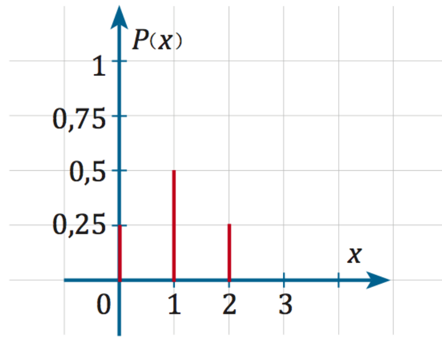
donde $P(x)$ es la probabilidad del elemento $x$ del espacio muestral.

**Ejemplo 1.4** *Se define la variable aleatoria "el número de hijos hombres que una pareja puede tener si tienen dos hijos", ¿cuál sería la función de probabilidad?*

H=hombre; M=Mujer
Espacio Muestral=$\{HH, HM, MH, MM\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{0 o 2 hijos hombres} \\ \frac{1}{2} & \text{1 hijo hombre} \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

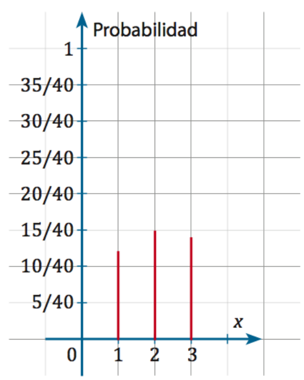
EL gráfico de esta función es




**Ejemplo 1.5** *Se tiene una urna con 12 bolitas rojas, 15 verdes y 13 azules y se define el suceso "sacar una bolita de la urna y ver su color". Determine la variable aleatoria y su función de probabilidad.*

La variable aleatoria: el color de la bolita extraída.
Se le asigna un número a los posibles elementos del espacio muestral. 1 al color rojo, 2 al verde y 3 al azul.

El gráfico de su función de probabilidad es:




**Ejemplo 1.6** *Variable aleatoria $x = N^o$ de caras al lanzar tres veces una moneda.*

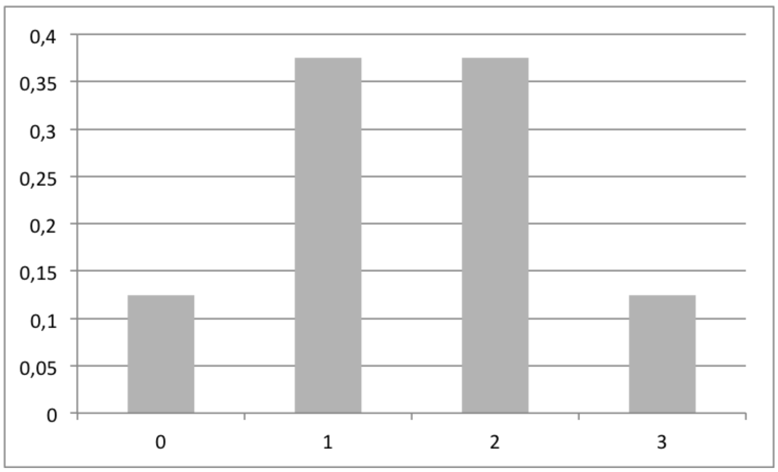
Posibles valores de $x : 0, 1, 2$ y 3
Espacio muestral al lanzar 3 veces la moneda:
$EM = \{CCC, CCS, CSC, SCC, SSC, SCS, CSS, SSS\}$ La variable aleatoria x:

- Toma valor 0 cuando ocurre el suceso $\{SSS\}$
- Toma valor 1 cuando ocurre el suceso $\{SSC, SCS, CSS\}$
- Toma valor 2 cuando $\{CCS, CSC, SCC\}$
- Toma valor 3 cuando $\{CCC\}$

La función de probabilidad es:

$$p_0 = P\{x = 0\} = 1/8 = 0,125$$
$$p_1 = P\{x = 1\} = 3/8 = 0,375$$
$$p_2 = P\{x = 2\} = 3/8 = 0,375$$
$$p_3 = P\{x = 3\} = 1/8 = 0,125$$

El gráfico de la función es:




**Ejemplo 1.7** *Calcular la probabilidad de que salgan a lo más dos caras.*

$$P\{x \leqslant 2\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} + P\{x = 2\} = 0,125 + 0,375 + 0,375 = 0,875$$

**Ejemplo 1.8** *Calcular la probabilidad de que el número de caras esté entre 1 y 2.*

$$P\{1 \leqslant x \leqslant 2\} = P\{x = 1\} + P\{x = 2\} = 0,375 + 0,375 = 0,75$$

## 1.4. Función de Distribución o de Probabilidad Acumulada

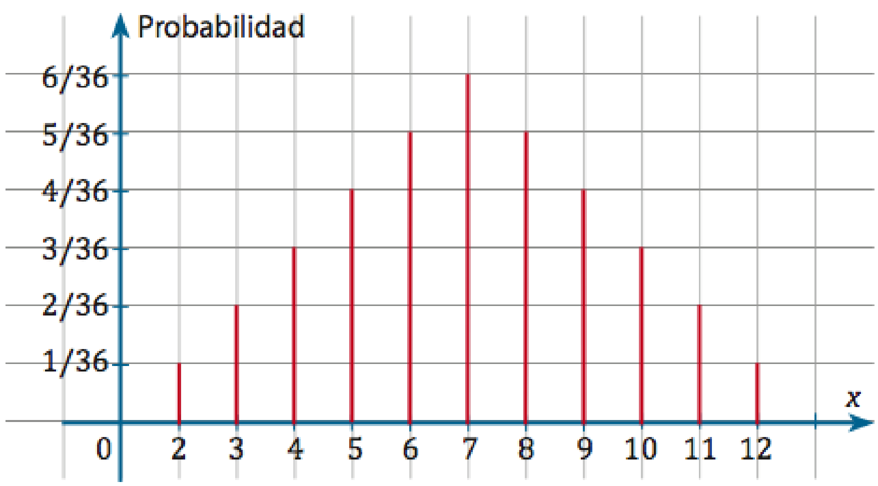
Esta función relaciona cada elemento del espacio muestral con la probabilidad acumulada hasta el valor dado.
Se define como:

$$F(x) = \mathbb{R} \to [0,1]\text{, tal que } F(x) = P(X \leqslant x) \tag{1.2}$$

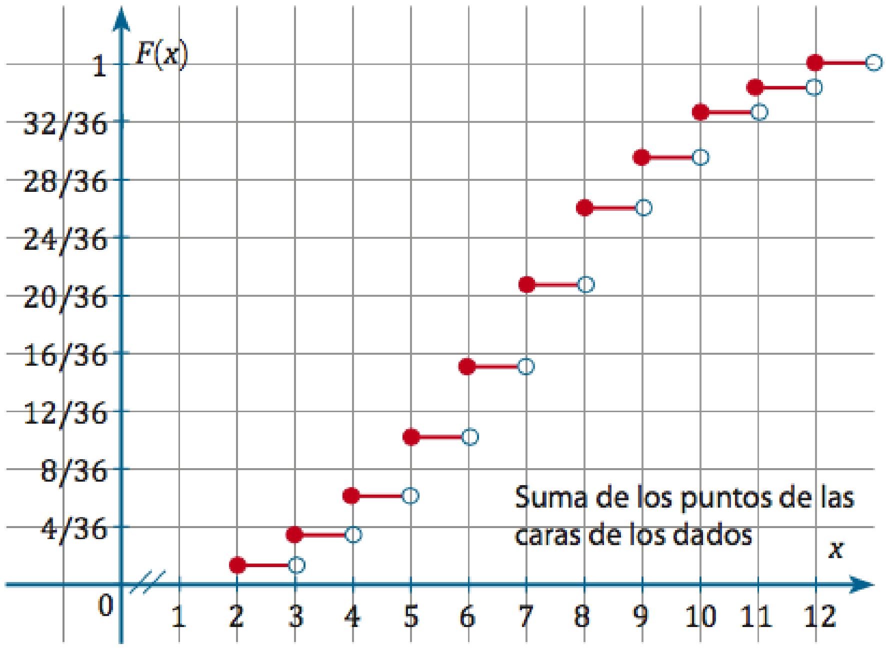
**Ejemplo 1.9** *Lanzamos dos dados y sumamos los puntos obtenidos en sus caras, determinar la función de distribución correspondiente.*

| Suma de las caras | Probabilidad | Probabilidad acumulada |
|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 3 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ |
| 4 | $\frac{3}{36}$ | $\frac{6}{36}$ |
| 5 | $\frac{4}{36}$ | $\frac{10}{36}$ |
| 6 | $\frac{5}{36}$ | $\frac{15}{36}$ |
| 7 | $\frac{6}{36}$ | $\frac{21}{36}$ |
| 8 | $\frac{5}{36}$ | $\frac{26}{36}$ |
| 9 | $\frac{4}{36}$ | $\frac{30}{36}$ |
| 10 | $\frac{3}{36}$ | $\frac{33}{36}$ |
| 11 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{35}{36}$ |
| 12 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{36}{36}$ |

El gráfico de la función de probabilidad es:




El gráfico de la función de distribución:




La probabilidad de obtener una suma menor o igual que 5

$$F(5) = P(x \leq 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

La probabilidad de obtener una suma mayor a 10

$$P(x > 10) = 1 - P(x \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \frac{33}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

## 1.5. Esperanza

Si $X$ es una variable aleatoria discreta que toma valores $x_1, x_2, ...x_k$, con probabilidad $p_1, p_2, ...p_k$, entonces la media o el valor esperado de $X$ está dado por:

$$E(X) = \mu_X = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k = \sum_{i=1}^{k} x_ip_i \tag{1.3}$$

**Ejemplo 1.10** *Supongamos que tenemos un dado cargado cuyas probabilidades son las siguientes:*

| Número del lado | Probabilidad |
|---|---|
| 1 | 0,20 |
| 2 | 0,10 |
| 3 | 0,05 |
| 4 | 0,30 |
| 5 | 0,25 |
| 6 | 0,10 |

$$E(X) = 1{\cdot}0,20{+}2{\cdot}0,10{+}3{\cdot}0,05{+}4{\cdot}0,30{+}5{\cdot}0,25{+}6{\cdot}0,10 = 0,20{+}0,20{+}0,15{+}1,20{+}1,25{+}0,60$$

$$E(X) = 3,60$$

La esperanza matemática es 3,60 significa que el valor esperado al lanzar una gran cantidad de veces el dado está entre 3 y 4.

**Ejemplo 1.11** *Una compañía ha vendido 205 pasajes para un avión de 200 asientos. Sea x la variable aleatoria que expresa el nº de viajeros que va al aeropuerto para viajar en el avión. Su distribución es:*

| $x_i$ | *198* | *199* | *200* | *201* | *202* | *203* | *204* | *205* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | *0,05* | *0,09* | *0,15* | *0,20* | *0,23* | *0,17* | *0,09* | *0,02* |

*a) Hallar la probabilidad de que todos los viajeros que van al aeropuerto tengan asientos.*

$$P\{x \leqslant 200\} = P\{x = 198\} + P\{x = 199\} + P\{x = 200\} = 0,05 + 0,09 + 0,15 = 0,29$$

*b) Obtener la probabilidad de que se quede sin asiento alguno de los viajeros que va al aeropuerto.*

$$P\{x > 200\} = P\{x = 201\}{+}P\{x = 202\}{+}...{+}P\{x = 205\} = 0,2{+}0,23{+}0,17{+}0,09{+}0,02 = 0,71$$

$$P\{x > 200\} = 1 - P\{x \leqslant 200\} = 1 - 0,29 = 0,71$$

*c) Calcular el nº esperado de viajeros que acude al aeropuerto.*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

$$E(X) = 198{\times}0,05{+}199{\times}0,09{+}200{\times}0,15{+}201{\times}0,2{+}202{\times}0,23{+}203{\times}0,17{+}204{\times}0,09{+}205{\times}0,02$$

$$E(X) = 201,44$$

## 1.6. Varianza

La varianza para un conjunto de datos, podemos definir la varianza de una variable aleatoria como el promedio ponderado de los cuadrados de la diferencia entre los valores de los elementos del espacio muestral y la esperanza matemática de la variable.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 \cdot P(x_i) \tag{1.4}$$

Este valor da una estimación de la homogeneidad de los valores de la variable aleatoria, en relación a cuán distantes están ellos de la esperanza matemática.

**Ejemplo 1.12** *En el ejemplo anterior del dado cargado, tenemos:*

| *Número del lado* | *Probabilidad* |
|---|---|
| *1* | *0,20* |
| *2* | *0,10* |
| *3* | *0,05* |
| *4* | *0,30* |
| *5* | *0,25* |
| *6* | *0,10* |

*Calculamos su varianza*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 \cdot P(x_i)$$

$$V(X) = (1-3,6)^2 \cdot 0,2 + (2-3,6)^2 \cdot 0,1 + (3-3,6)^2 \cdot 0,05 + (4-3,6)^2 \cdot 0,3 + (5-3,6)^2 \cdot 0,25 + (6-3,6)^2 \cdot 0,1$$

$$V(X) = 1,352 + 0,256 + 0,018 + 0,048 + 0,49 + 0,576$$

$$V(X) = 2,74$$

*El resultado de la varianza está en unidades al cuadrado. Si extraemos raíz cuadrada tenemos:*

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{2,74} \approx 1,66$$

*Si sumamos y restamos este valor a la esperanza:*

$$E(X) = 3,6$$

$$3,6 + 1,66 = 5,26$$

$$3,6 - 1,66 = 1,94$$

*En una gran cantidad de lanzamiento se debiera esperar que los números entre 5 y 2 tuvieran mayor probabilidad de salir. Las probabilidades del espacio muestral están muy dispersas.*

## 1.7. Desviación Estándar

Es la raíz cuadrada de la varianza de la variable. Ella nos da una referencia del rango en el que fluctuarán la mayoría de los valores de la variable, si restamos y sumamos ésta a la esperanza. Se representa por $\sigma$

# 2. Ejemplos

**Ejemplo 2.1** *Un miembro del directorio de una empresa ha comprobado que, si bien todos los años tienen una reunión, ha habido años que tienen hasta cinco. Por la experiencia acumulada durante años sabe que el número de reuniones anuales se distribuye con arreglo a la siguiente tabla:*

| Nº de reuniones al año | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 2/15 | 5/15 | 1/15 | 3/15 | 4/15 |

*a) Sea X la variable número de juntas al año ¿Es variable aleatoria discreta?*
*La variable aleatoria "X= número de reuniones al año.*$^{es}$ *variable aleatoria discreta ya que solo toma valores enteros*

*b) Calcular la función de probabilidad*
*La función de probabilidad de la variable aleatoria X nos la da el enunciado:*

| $x_i$ | $p_i = P(X \leq x)$ |
|---|---|
| 1 | 2/15 |
| 2 | 5/15 |
| 3 | 1/15 |
| 4 | 3/15 |
| 5 | 4/15 |

*c) Función de distribución:*

| Valor de X | $F(X) = P(X \leq x)$ |
|---|---|
| $x < 1$ | 0 |
| $1 \leq x < 2$ | 2/15 |
| $2 \leq x < 3$ | 7/15 |
| $3 \leq x < 4$ | 8/15 |
| $4 \leq x < 5$ | 11/15 |
| $x \geq 5$ | 1 |

*d) Calcular la esperanza, la varianza y la desviación estándar.*
*Para facilitar estos cálculos usamos la siguiente tabla de probabilidades:*

| $x_i$ | $p_i$ | $x_i \cdot p_i$ | ${x_i}^2 \cdot p_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2/15 | 2/15 | 2/15 |
| 2 | 5/15 | 10/15 | 20/15 |
| 3 | 1/15 | 3/15 | 9/15 |
| 4 | 3/15 | 12/15 | 48/15 |
| 5 | 4/15 | 20/15 | 100/15 |
| | 1 | 47/15 | 179/15 |

*Esperanza*

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ..... + x_np_n = \sum_{I=1}^{n} x_ip_i$$

$$(EX) = \frac{47}{15} = 3,13$$

*Varianza*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 \cdot P_i$$

$$V(X) = \frac{179}{15} - (3{,}13)^2 = 2,13$$

*Desviación Estándar*

$$\sigma = \sqrt{2{,}13} = 1{,}46$$

e) *Calcular la probabilidad de que en un año elegido al azar se celebren más de 3 reuniones*

$$P\left[X > 3\right] = P\left[X = 4\right] + P\left[X = 5\right] = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15} = 0{,}466$$

**Ejemplo 2.2** *Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:*

| $x$ | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

a) *Función de distribución*

| Valor de $X$ | $F(X))$ |
|---|---|
| $x < 2$ | 0 |
| $2 \leq x < 3$ | 0,2 |
| $3 \leq x < 5$ | 0,3 |
| $5 \leq x < 6$ | 0,7 |
| $6 \leq x < 8$ | 0,9 |
| $x \geq 8$ | 1 |

b) *Esperanza y desviación estándar*

| $x_i$ | $p_i$ | $x_i \cdot p_i$ | ${x_i}^2$ | ${x_i}^2 \cdot p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,2 | 0,4 | 4 | 0,8 |
| 3 | 0,1 | 0,3 | 9 | 0,9 |
| 5 | 0,4 | 2 | 25 | 10 |
| 6 | 0,2 | 1,2 | 36 | 7,2 |
| 8 | 0,1 | 0,8 | 64 | 6,4 |
| | 1 | 4,7 | | 25,3 |

*Esperanza*

$$E(X) = 4,7$$

*Desviación estándar o típica*

$$\sigma = \sqrt{25{,}3 - (4{,}7)^2} = \sqrt{3{,}21} = 1{,}79$$

**Ejemplo** ***2.3*** *Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es:*

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |

*a) Función de distribución*

| Valor de X | $F(X))$ |
|---|---|
| $x < 0$ | 0 |
| $0 \leq x < 1$ | 0,1 |
| $1 \leq x < 2$ | 0,3 |
| $2 \leq x < 3$ | 0,4 |
| $3 \leq x < 4$ | 0,8 |
| $4 \leq x < 5$ | 0,9 |
| $x \geq 5$ | 1 |

*b) Esperanza y varianza*

| $x_i$ | $p_i$ | $x_i \cdot p_i$ | ${x_i}^2$ | ${x_i}^2 \cdot p_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,2 | 0,2 | 1 | 0,2 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 4 | 0,4 |
| 3 | 0,4 | 1,2 | 9 | 3,6 |
| 4 | 0,1 | 0,4 | 16 | 1,6 |
| 5 | 0,1 | 0,5 | 25 | 2,5 |
| Total | 1 | 2,5 | | 8,3 |

*Esperanza*

$$E(X) = 2,5$$

*Varianza*

$$\sigma = 8{,}3 - (2,5)^2 = 2,05$$

# 3. Ejercicios

1. Un taller automotriz que se especializa en ajustes de motor sabe que 45 % de los ajustes se efectúa en automóviles de cuatro cilindros, 40 % en automóviles de seis cilindros y 15 % en automóviles de ocho cilindros.
   Sea X = número de cilindros del siguiente automóvil al que se le hace un ajuste de motor.

   a) ¿Cuál es la función de probabilidad de X?

   b) Construya un gráfico de líneas y un histograma de probabilidad para la función de probabilidad.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente automóvil ajustado tenga por lo menos cuatro cilindros? ¿Más de seis cilindros?.

2. A veces 1as aerolíneas registran más pasajeros del cupo normal de los vuelos. Supóngase que para un avión con 50 asientos, 55 pasajeros tienen pasaje. Defina 1a variable aleatoria Y como el número de pasajeros con pasaje que en realidad se presenta para el vuelo. En la tabla siguiente se ilustra la función de probabilidad de Y.

| Y | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(y)$ | 0,05 | 0,10 | 0,12 | 0,14 | 0,25 | 0,17 | 0,06 | 0,05 | 0,03 | 0,02 | 0,01 |

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda acomodar a todos los pasajeros con boleto que se presentan para realizar el vuelo?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no todos los pasajeros con pasaje que se presentan para realizar el vuelo puedan ser acomodados?

   c) ¿Si el lector es la primera persona en lista de espera (lo que significa que será el primero en abordar el avión si hay asientos disponibles después que han sido acomodados todos los pasajeros con pasaje). ¿Cuál es la probabilidad de que pueda realizar el vuelo?

   d) ¿Cuál es la probabilidad si es la tercera persona en la lista de espera?

3. Un negocio de computadoras que atiende pedidos por correo, tiene seis líneas telefónicas. Sea X e1 número de líneas en uso en un momento específico. Supongamos que la función de probabilidad de X es como la que se proporciona en la tabla siguiente:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,20 | 0,06 | 0,04 |

   Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.

a) A lo sumo tres líneas están en uso.
b) Menos de tres líneas están en uso.
c) Por lo menos tres líneas están en uso.
d) Entre dos y cinco líneas, inclusive, están en uso.
e) Entre dos y cuatro líneas, inclusive, no están en uso.
f) Por lo menos cuatro líneas no están en uso.

4. Muchos fabricantes tienen programas de control de calidad que incluyen la revisión de defectos en los materiales recibidos. Supóngase que un fabricante de computadoras recibe tarjetas en lotes de cinco. De cada lote se seleccionan dos tarjetas para inspeccionarlas. Se pueden representar los posibles resultados del proceso de selección mediante pares. Por ejemplo, el par (1, 2) representa la selección de las tarjetas 1 y 2 para inspección.

a) Liste los diez resultados posibles diferentes.
b) Supóngase que las tarjetas 1 y 2 son las únicas defectuosas de un lote de cinco y se escogerán al azar dos tarjetas. Sea X el número de tarjetas defectuosas observado entre las inspeccionadas. Determine la distribución de probabilidad de X.
c) Sea $F(x)$ la función de distribución acumulada de X. Determine primero $F(0)$, $F(1)$ y $F(2)$, y después obtenga $F(x)$ para cualquier valor de $x$.

5. Una organización de consumidores que evalúa automóviles nuevos, suele informar del número de defectos importantes de cada automóvil examinado. Sea X el número de defectos importantes en un automóvil de cierto tipo seleccionado al azar. La función de distribución acumulada de X es como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} 0,00 & x < 0 \\ 0,06 & 0 \leq x < 1 \\ 0,19 & 1 \leq x < 2 \\ 0,39 & 2 \leq x < 3 \\ 0,67 & 3 \leq x < 4 \\ 0,92 & 4 \leq x < 5 \\ 0,97 & 5 \leq x < 6 \\ 1,00 & x > 6 \end{cases}$$

Calcule las siguientes probabilidades directamente de la función de distribución acumulada:

a) $P(2)$
b) $P(X > 3)$
c) $P(2 \leq X \leq 5)$
d) $P(2 < X < 5)$

6. La función de probabilidad para X = número de defectos importantes en un aparato de cierta clase seleccionado al azar, es :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0,08 | 0,15 | 0,45 | 0,27 | 0,05 |

Calcular:

a) $E(X)$
b) $V(X)$
c) La desviación estándar de $X$

7. Se selecciona al azar a un individuo que tiene un seguro automotriz de cierta compañía. Sea Y la cantidad de infracciones de circulación por las que el individuo ha sido citado durante los últimos tres años. La función de probabilidad de Y es:

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p(y)$ | 0,60 | 0,25 | 0,10 | 0,05 |

a) Calcule $E(Y)$

8. Un distribuidor de aparatos electrodomésticos vende tres modelos diferentes de congeladores verticales con capacidad de $13,5$, $15,9$ y $19,1$ pies cúbicos de espacio de almacenaje, respectivamente. Sea X = cantidad de espacio de almacenaje que compra el siguiente cliente. Suponga que $X$ tiene la siguiente función de masa de probabilidad:

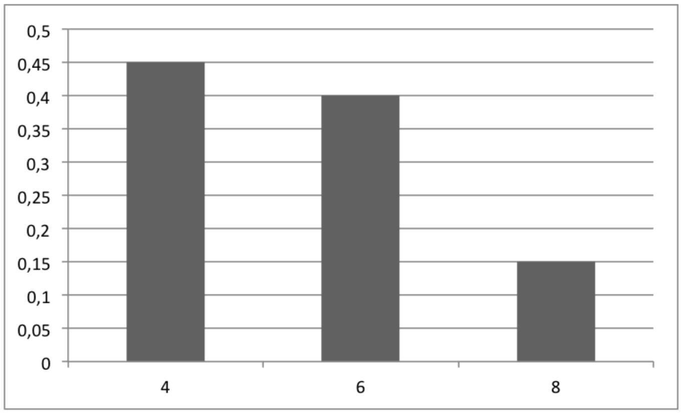
| $x$ | 13,5 | 15,9 | 19,1 |
|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

a) Calcule $E(X)$, $E(X^2)$, y $V(X)$
b) $V(X)$
c) Si el precio de un congelador con capacidad de $X$ pies cúbicos es $25X - 8,5$, ¿cuál es el precio esperado que paga el siguiente cliente por un congelador?
d) ¿Cuál es la varianza del precio $25X - 8,5$ que paga el siguiente cliente?
e) Suponga que si bien la capacidad nominal de un congelador es $X$, la capacidad real es $h(X) = X - 0,01X^2$ ¿Cuál es la capacidad real esperada del congelador que compra el siguiente cliente?

# 4. Respuestas

1. a)

| x | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|
| p(x) | 0,45 | 0,40 | 0,15 |

   b) 


   c) $P(x \geq 4) = 1; P(x > 6) = 0,15$

2. a) $P(Y < 50) = 0,83$
   b) $P(Y > 51) = 0,17$
   c) $P(Y < 49) = 0,66$
   d) $P(Y < 47) = 0,27$

3. a) 0,07
   b) 0,45
   c) 0,55
   d) 0,71
   e) 0,65
   f) 0,8

4. a) (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (3,4) , (3,5) , (4,5)
   b) $p(0) = 0,3 p(1) = 0,6 p(2) = 0,1$
   c) $F(0) = 0{,}3$
   $F(1) = 0,9$
   $F(2) = 1$

5. a) $P(2) = 0,39$
   b) $P(X > 3) = 0,33$
   c) $P(2 \leq x \leq 5) = 0,78$
   d) $P(2 < x < 5) = 0,73$

6. a) $E(X) = 2,06$
   b) $V(X) = 0,9364$

c) $\sigma = 0,9677$

7. $E(y) = 0,6$

8. a) $E(X) = 16,38$
   $E(X^2) = 272,298$

   b) 329

   c) 60

   d) $19,09$