

Guía de Ejercicios

Funciones

Iº Medio

Profesor:
Alberto Alvaradejo Ojeda
30 de septiembre de 2015

Índice

1. Funciones	3
1.1. Dominio	3
1.2. Recorrido	3
1.3. Representación de una función	3
1.4. Graficar una función	4
1.5. Pendiente	6
1.5.1. Valores que puede tomar la pendiente	7
1.6. Determinar dominio y recorrido de una función	8
1.7. Función lineal	8
1.8. Función afín	8
1.9. Función compuesta	9
1.9.1. Propiedades de la composición de funciones	9
1.10. Ejercicios	10

1. Funciones

Una función definida de A en B es una relación tal que a cada elemento x (preimagen) de A le corresponde un único elemento y (imagen) de B .

$$y = f(x)$$

donde:

x variable independiente

y variable dependiente

1.1. Dominio

Es el conjunto formado por las preimágenes o valores que toma la variable independiente.

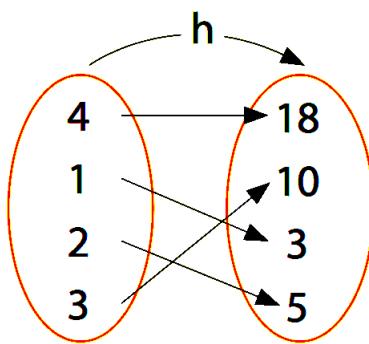
1.2. Recorrido

Es el conjunto formado por las imágenes o valores que toma la variable dependiente.

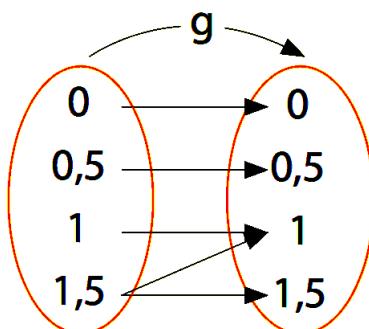
1.3. Representación de una función

Una función se puede representar por medio de:

- a) Diagrama sagital



Es función ya que cada preimagen le corresponde una única imagen.



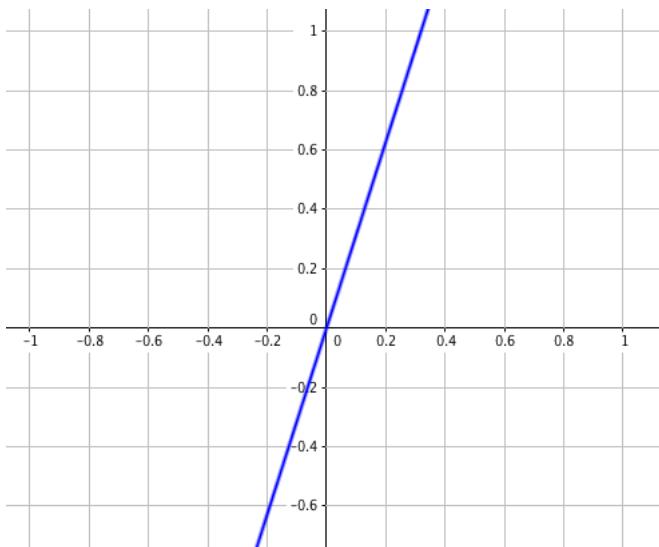
No es función ya que 1,5 tiene dos imágenes.

b) Una tabla de valores

Diámetro	1	2	3	4	5
Perímetro	3,14	2,28	9,42	12,57	15,71

c) Un gráfico.

El gráfico de la función anterior:



d) Expresión algebraica La expresión algebraica que representa la función enterios es

$$f(x) = 3,14x$$

donde x representa la variable independiente y $y = f(x)$ la variable dependiente.

1.4. Graficar una función

Para graficar una función debemos identificar elementos importantes. Veamos estos a través de un ejemplo:

Ejemplo 1.4.1 En un concierto de música el valor de la entrada es de \$34000. Modelar esta situación como una función para determinar la ganancia.

a) Identificar la relación de dependencia

La ganancia depende de la cantidad de entradas que se vendan.

Variable dependiente, la ganancia (G)

Variable independiente, la cantidad de personas que asisten al concierto (x).

b) Función que representa la situación anterior es:

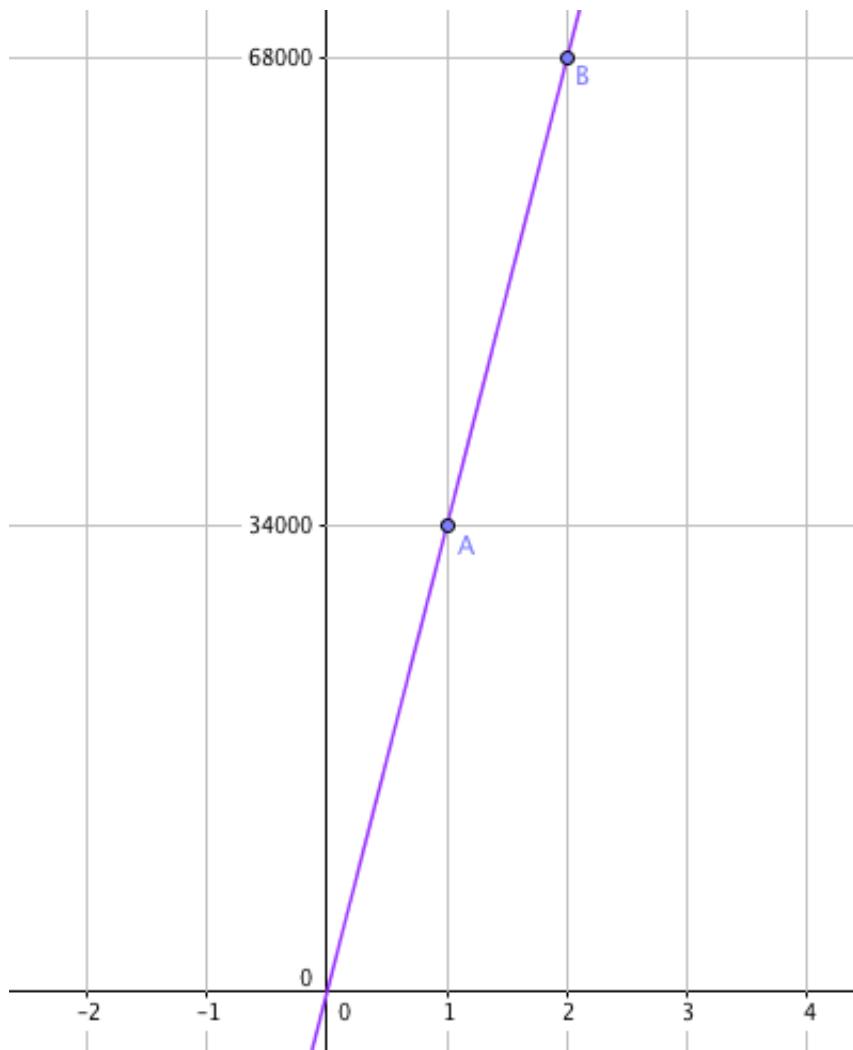
$$G(x) = 34000x$$

c) Gráfico

Para graficar una función basta con dos puntos y unirlos con una línea recta. En este caso valoramos la función para la venta de 1 y 2 entradas del concierto.

En el eje X se grafican los valores de la variable independiente (Nro. de personas), y en el eje Y los valores de la variable dependiente.

x	$G(x)$
1	34000
2	68000

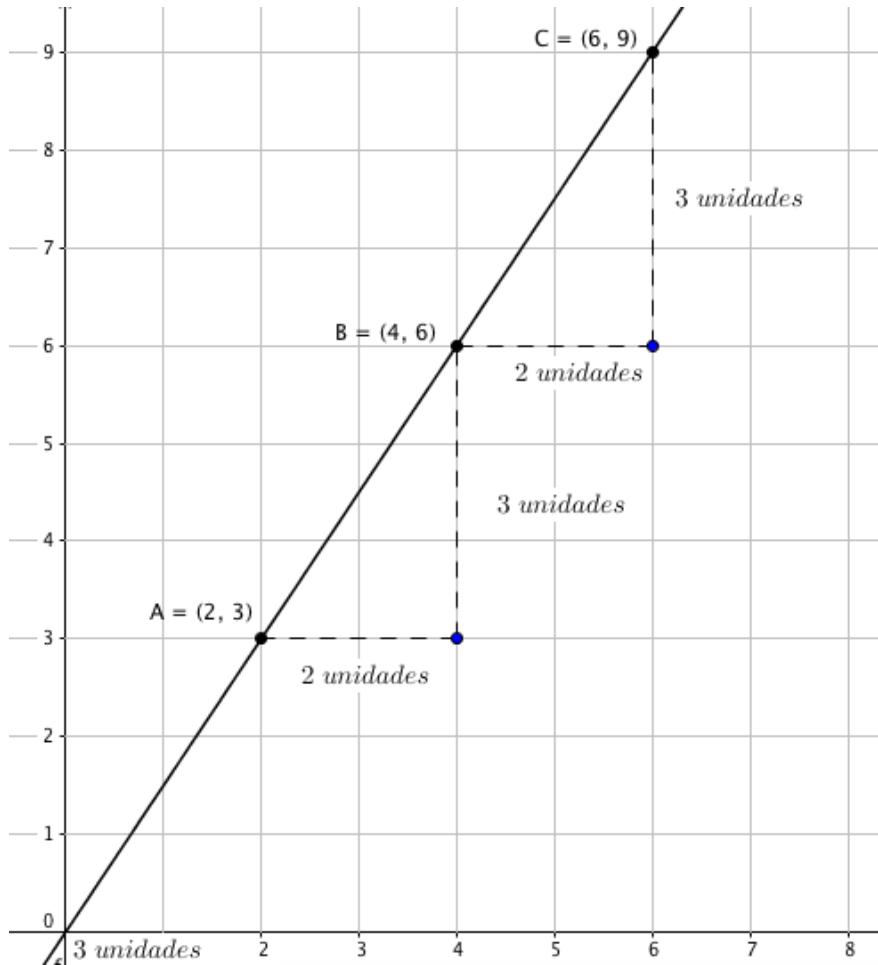


1.5. Pendiente

La pendiente (m) de una recta corresponde a la razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas. Su valor determina la inclinación de la recta con respecto al eje X .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Calculemos la pendiente de la siguiente función:



Pendiente entre los puntos A y B

$A(2_{x_1}, 3_{y_1})$ y $B(4_{x_2}, 6_{y_2})$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - 2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{3}{2}$$

Pendiente entre los puntos B y C

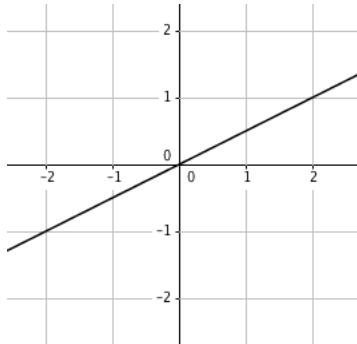
$B(4_{x_1}, 6_{y_1})$ y $C(6_{x_2}, 9_{y_2})$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 6}{6 - 4} = \frac{3}{2}$$

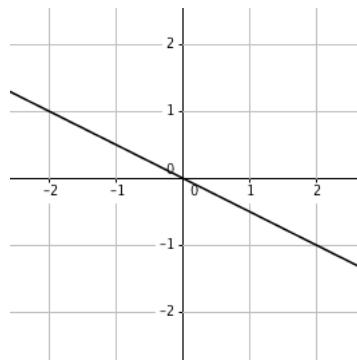
$$m_{BC} = \frac{3}{2}$$

1.5.1. Valores que puede tomar la pendiente

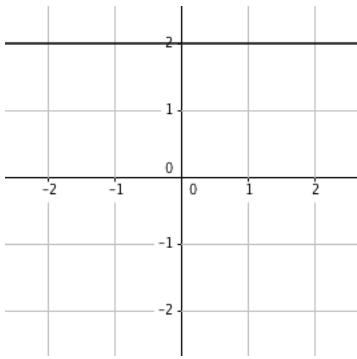
Si la pendiente es positiva, $m > 0$



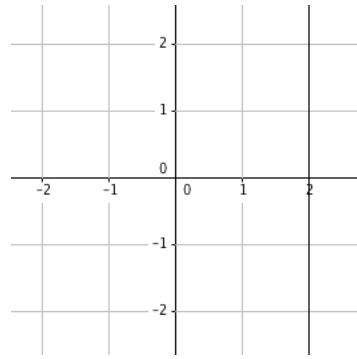
Si la pendiente es negativa, $m < 0$



Si la pendiente es cero, $m = 0$



Si la pendiente es indefinida

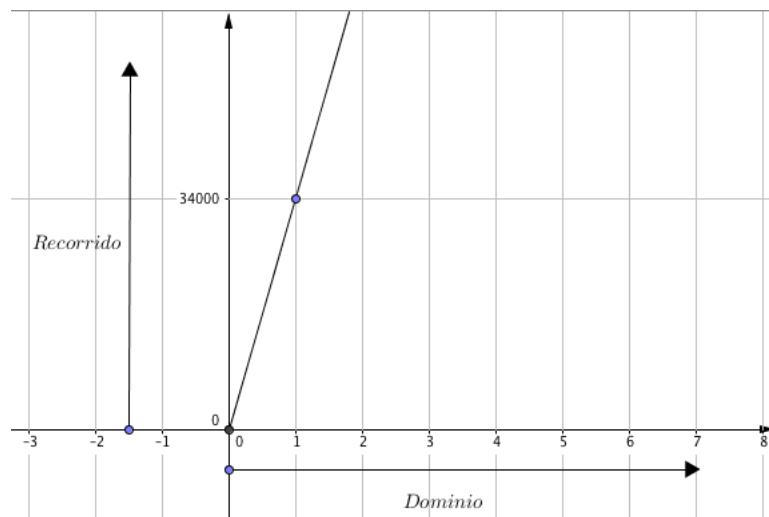


1.6. Determinar dominio y recorrido de una función

Si el dominio no se especifica, debe entenderse que el dominio incluye a todos los números reales para los cuales la función tiene sentido.

En el ejemplo de la ganancia del concierto de música el dominio son todos los números enteros (suponiendo que no puede ir una persona y media) y el recorrido los números enteros múltiplos de 34000 incluido el cero (si no se vende ninguna entrada).

Graficamente:



1.7. Función lineal

Una función lineal es de la forma $y = f(x) = mx$ que relaciona dos variables x e y directamente proporcionales, donde la constante de proporcionalidad es la pendiente (m). Al graficar esta función se obtiene una recta que pasa por el origen $(0, 0)$.

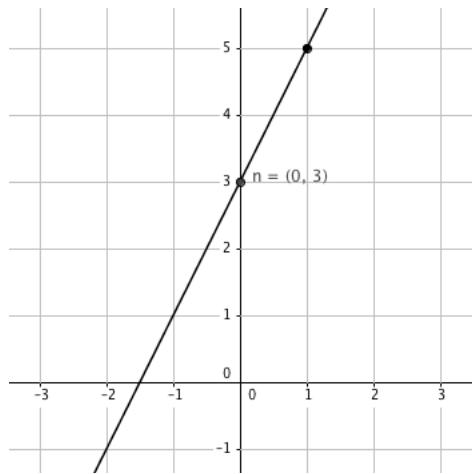
1.8. Función afín

Una función afín es de la forma $f(x) = mx + n$ con $m, n \neq 0$.

Donde m es la pendiente de la recta y n es el punto $(0, n)$ donde la recta intersecta al eje Y y se denomina **coeficiente de posición**.

Ejemplo 1.8.1 *Graficar $f(x) = 2x + 3$*

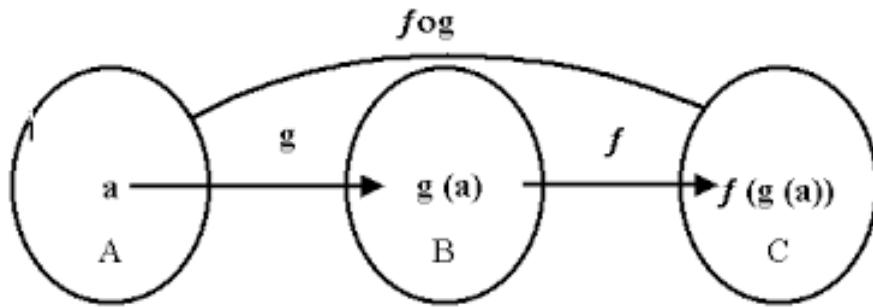
x	$f(x)$
0	3
1	5



Es una recta de pendiente $m = 2$ y coeficiente de posición $n = 3$, es decir corta al eje Y en el punto $(0, 3)$.

1.9. Función compuesta

Sean f y g dos funciones, ta que, $f : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$, la función compuesta $g \circ f : A \rightarrow C$ se define como: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ y se lee "g compuesta con f". graficamente:



Ejemplo 1.9.1 Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = -5x$, determinar $(f \circ g)(x)$

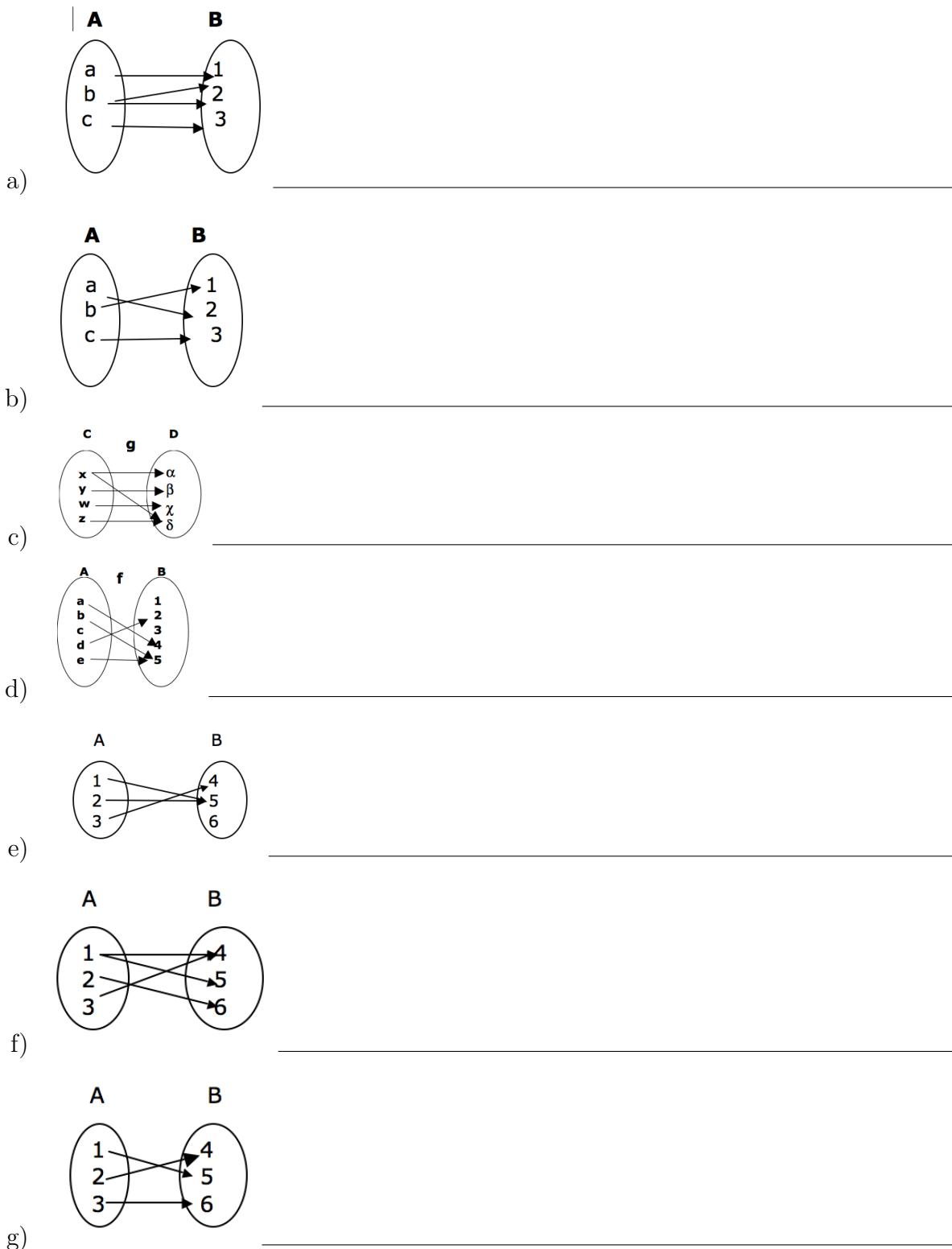
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(-5x) = -10x$$

1.9.1. Propiedades de la composición de funciones

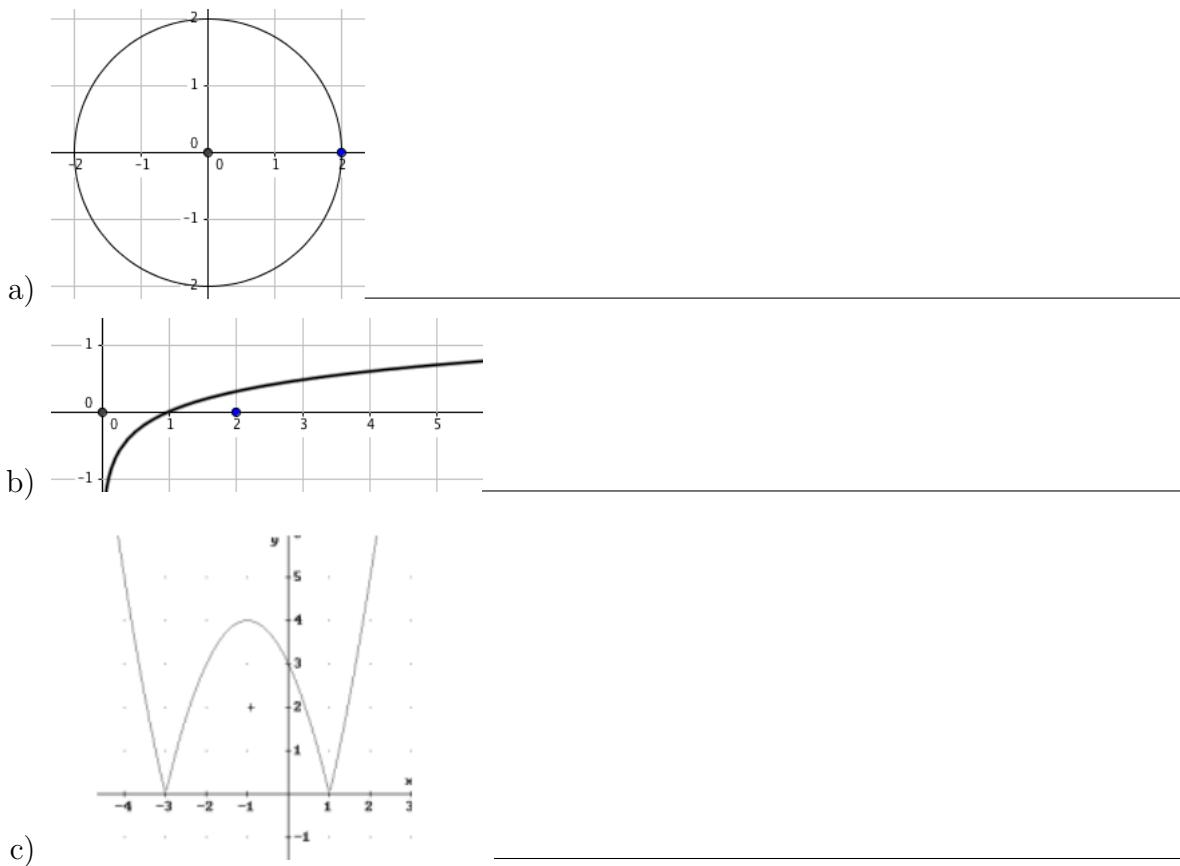
- 1) **Clausura**, si f y g son funciones afines, $f \circ g$ y $g \circ f$ también lo son. Los mismo sin son funciones lineales.
- 2) **Asociatividad**, es decir, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- 3) **Elemento neutro**, es decir, $l(x) = x$, tal que $f \circ l(x) = l \circ f(x) = f(x)$, donde $l(x)$ es la función identidad.
- 4) La composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, es decir $f \circ g \neq g \circ f$

1.10. Ejercicios

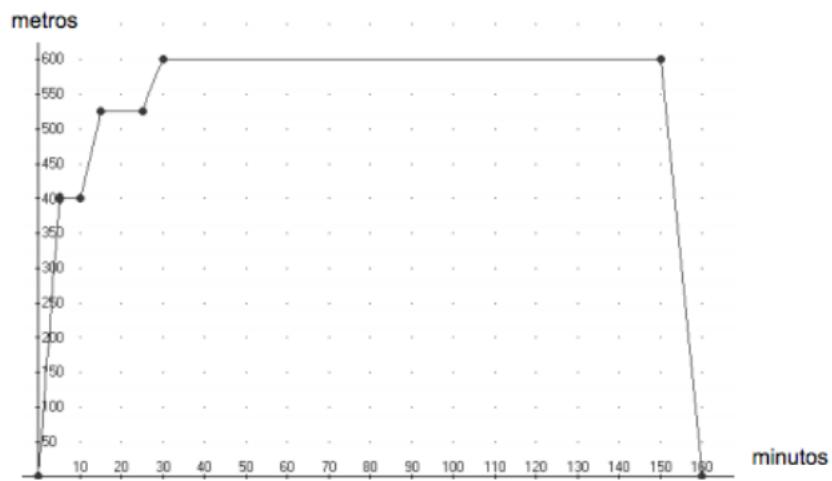
- 1) En los siguientes gráficos sagitales, determinar si las relaciones son o no funciones, explique:



2) De los siguientes gráficos indicar cuáles representan función y cuáles no:



3) Observa el siguiente gráfico:



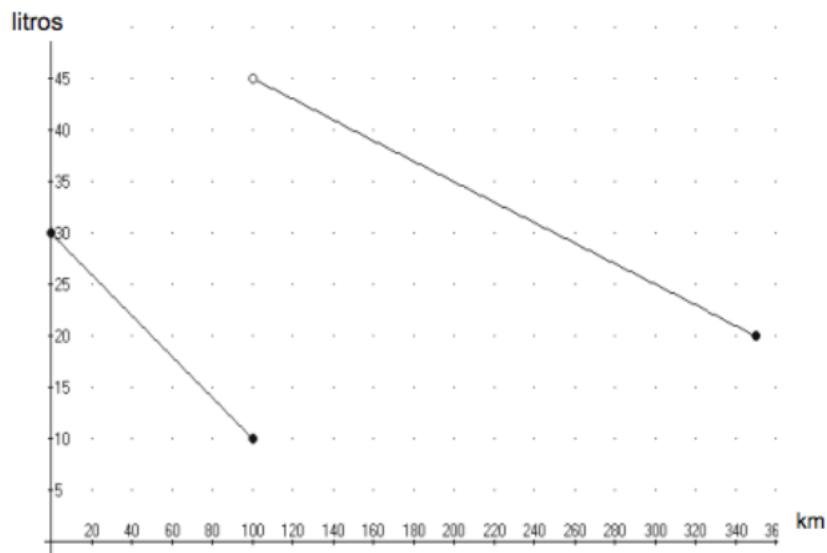
Este gráfico representa los movimientos de Juan cuando va a la Universidad cada mañana. En el eje X está representado el tiempo en minutos y en el eje Y la distancia en metros. Lo primero que hace Juan es ir al Kiosko. Después se para en la siguiente esquina para esperar a un compañero. Cuando terminan las clases vuelve a casa.

- a) ¿Qué distancia hay de la casa a la universidad? _____
- b) ¿Y al Kiosko? _____
- c) ¿Cuánto de tiempo le cuesta comprarse la colación? _____
- d) ¿Espera mucho al compañero? _____
- e) ¿Cuánto tiempo está en clase? _____
- f) Si las clases empiezan a las 3 de la tarde, ¿dónde estaba Juan a las 2h30m, a las 2h35m y a las 2h45m? _____
- g) ¿Lleva la misma velocidad cuando va a la universidad que cuando vuelve? _____
- h) ¿Hay distintas velocidades a lo largo del trayecto? _____
- 4) Vamos de viaje a Punta Arenas en avión, una vez en la ciudad queremos arrendar un auto. Llamamos a una empresa de arriendo de autos para pedir el precio: \$200 por cada kilómetro. Hemos decidido hacer un estudio de los gastos del viaje y necesitamos conocer el precio que tenemos que pagar según el número de kilómetros. Rellena la tabla siguiente, especificando el dominio y el recorrido, y después determina la función que lo representa.

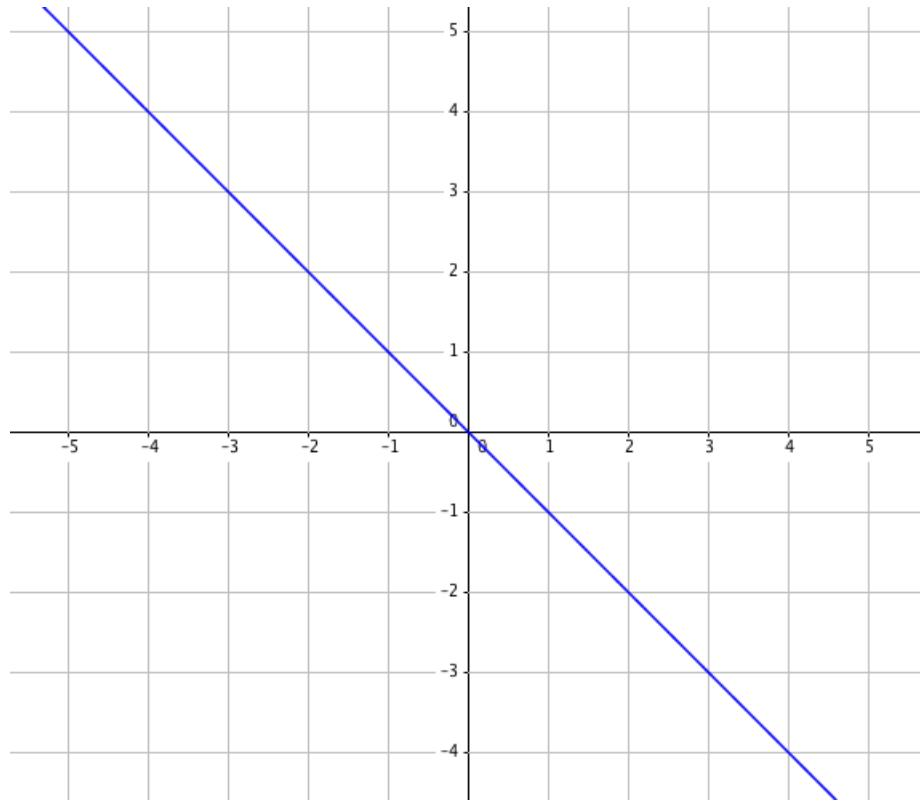
Distancia x	1km	2km	3km	4km	5km	6km	7km	8km	9km	10km
Valor \$										

Función:

- 5) La figura representa la variación de la cantidad de gasolina del depósito de un auto durante un viaje.



- a) ¿Con cuántos litros ha empezado el viaje? _____
- b) ¿Cuántos litros de gasolina tenía el depósito cuando llevaba 200 km de viaje?. _____
- c) ¿Cuántos kilómetros llevaba cuando quedaban 15 litros en el depósito? _____
- d) ¿Qué pasó a los 100 km.? _____
- e) ¿Qué cantidad de gasolina ha gastado durante todo el viaje?. _____
- f) ¿Cuál es el consumo medio de este auto (litros por cada 100 km)? _____
- g) Si no hubiera parado a llenar gasolina, ¿qué habría pasado? _____
- 6) Calcular el valor de las imágenes a partir del siguiente gráfico:



- a) $f(0)$
- b) $f(-1)$
- c) $f(1)$
- d) $f(2)$
- e) $f(3)$
- f) $f(-3)$
- g) $f(0) - f(-4) - (5)$
- h) $f(3) - \{f(0) + f(-5)\}$

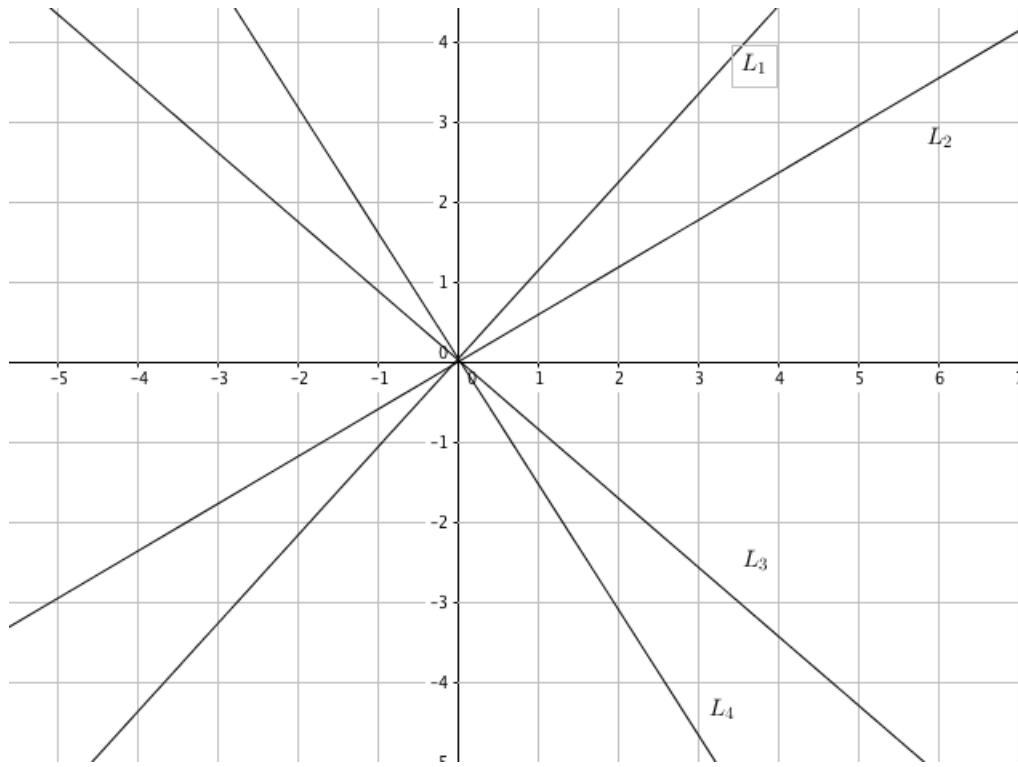
i) $\frac{f(3)}{f(2)}$

- 7) Francisca tiene \$37.000 y puede ahorrar \$9.000 a la semana. Si no gasta su dinero:
- Determina la variable dependiente e independiente
 - Encuentra una función que exprese la relación entre tiempo y el dinero.
 - Al cabo de 8 semanas, ¿cuánto dinero tendrá Francisca?
 - Si quiere comprar un televisor que cuesta \$127.000, ¿en cuántas semanas juntará el dinero?
- 8) Rodrigo es taxista. El cobra \$1.000 por bajada de bandera y \$300 por cada 100 mts. de recorrido.
- Determina la variable dependiente e independiente
 - Encuentra una función que exprese la relación entre distancia recorrida y el dinero.
 - Graficar está función
- 9) la temperatura de ebullición del agua al nivel del mar es de $100^{\circ}C$. A medida que la altura varía, la temperatura de ebullición varía. Un equipo que se prepara para subir la montaña considera la siguiente tabla:

Altura m	0	500	1000	1500	2000
Temo. de ebullición $^{\circ}C$	100	99,5	99	98	97,5

- Determina la variable dependiente e independiente
 - Encuentra una función que exprese la relación entre la altura y la temperatura de ebullición.
 - Graficar está función.
 - ¿Las variables son directamente proporcionales?
 - ¿Cuál sería la temperatura aproximada a los $4.000 mts$ de altura?
- 10) Calcular la pendiente (m) de la recta que contiene los siguientes pares de puntos:
- $(5, 8)$ y $(0, 1)$
 - $(-2, 12)$ y $(10, -21)$
 - $(-4, -1)$ y $(5, -1)$
 - $(0, 0)$ y $(8, -3)$
 - $(-1, -5)$ y $(-3, -14)$
 - $(5, 8)$ y $(0, 1)$

- g) $(1/5, -2)$ y $(1/7, -1/3)$
- 11) Calcular las pendientes de las rectas L_1 , L_2 , L_3 y L_4 e indicar cuales pendientes son positivas y negativas.



- 12) El costo de los pasajes de buses interurbanos se muestra en la siguiente tabla:

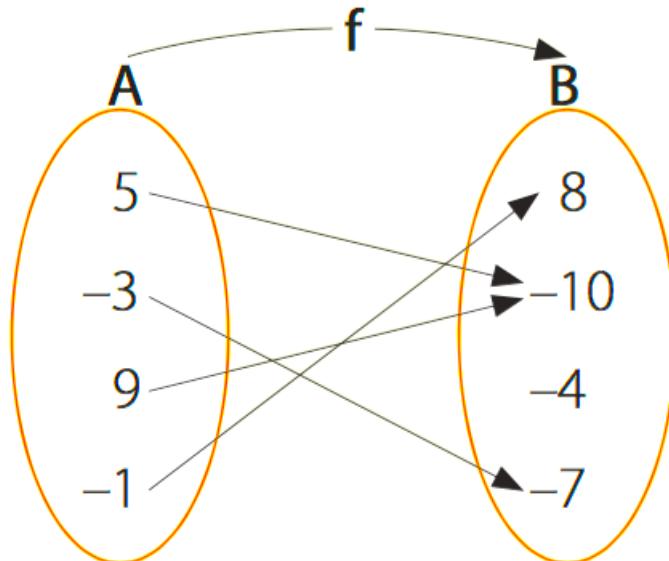
Nº de pasajes	1	2	3
Precio Total	2000	3000	4000

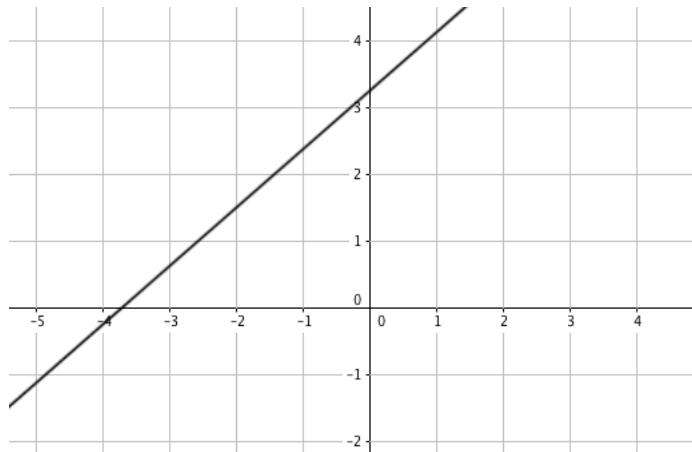
Graficar los datos y calcular la pendiente de la recta que contiene los puntos.

- 13) Para cada función construir una tabla de valores e identificar cuál corresponde a una función lineal.
- $f(x) = -\frac{1}{2}x$
 - $h(x) = 2x - 5$
 - $g(s) = 4s - \frac{3}{4}$
 - $f(x) = \frac{3x - 1}{2}$
 - $t(x) = 6t$

- 14) Un automóvil recorre, con una velocidad constante, 90 km por hora.
- Construir una tabla que muestre la distancia recorrida en 1,2,4,5,6,7,8 horas.
 - ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
 - A partir de la tabla construir un gráfico.
 - Construir la función que modele esta situación.
- 15) Un excursionista sube un cerro en moto a una velocidad de 30 km/h. y baja a una velocidad de 45 km/h.
- ¿Cuál es la distancia que recorre si se demora 5 minutos en subir y 2 minutos en bajar?
 - Determinar la funciones que modelan esta situación.
- 16) Identificar las funciones que son lineales o afines. Justificar identificando pendiente y coeficiente de posición.
- $f(x) = \frac{3x - 2}{2}$
 - $f(x) = 2x$
 - $f(x) = -2x - 1$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
 - $f(x) = \frac{2}{5}x$
- 17) Graficar una función afín a partir de los siguientes puntos y construye la expresión algebraica de cada función.
- (0, 2) y (2, 4)
 - (-1, -3) y (0, -4)
 - (5, 2) y (2, -5)
 - (4, 7) y (-2, -3)
- 18) Un vendedor le pagan un sueldo base más una comisión por cada venta. El sueldo base mensual es de \$200.000 y por cada venta gana \$50.000.
- Determinar la función que represente el sueldo mensual más la comisión en un mes.
 - Aproximadamente, ¿cuántas ventas tiene que realizar para igualar su sueldo base?
 - Otra empresa le ofrece las mismas condiciones de trabajo, pero con un sueldo base de \$250.000 con una comisión de \$55.000. Si el vendedor realizar más de 100 ventas ¿le conviene cambiarse de trabajo?. Justifica
- 19) Una piscina de 20m de largo, 15m de ancho y 3m de profundidad con una capacidad de $200m^3$ es llenada por una llave a razón de $5m^3$ por segundo.

- a) Determinar la función que modela el llenado de la piscina en relación al tiempo.
- b) Si la piscina comienza a llenarse a las 8:00 de la mañana, ¿a qué hora terminará de llenarse?
- 20) Una empresa de telefonía celular ofrece dos planes, que se muestran en la siguiente tabla:
- | Plan | Cargo Fijo | Costo por llamada |
|------|------------|-------------------|
| A | \$16.000 | 100 |
| B | \$18.000 | 70 |
- a) Determinar la función que modela el monto total a pagar por plan.
- b) Si un cliente hace 20 llamadas al mes, ¿que plan le conviene contratar?
- c) Si hace 80 llamadas, ¿cuál plan le conviene?
- d) ¿Para cuantas llamadas es más conveniente un plan u otro?
- e) Construir el gráfico para los planes.
- 21) Expresa la superficie de un rectángulo de perímetro 100m en función de su base x . Representar gráficamente la función obtenida. Utilizarla para hallar las dimensiones del rectángulo de máxima superficie.
- 22) Identifica el dominio y recorrido para las siguientes funciones:
- a) $f : A \rightarrow B : \{(-3, -11), (-1, -1), (0, 4), (2, 14)\}$
- b) $f : A \rightarrow B$



c) $f(x)$ d) $f(x) = -5x$

23) Expresar mediante una sola función las siguientes composiciones de funciones, si:
 $f(x) = 3x$, $g(x) = -2x$, $h(x) = 3x - 1$ y $i(x) = x^2$

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(g \circ g)(x)$ c) $(g \circ h)(x)$ d) $(f \circ h)(x)$ e) $(h \circ i)(x)$ f) $(i \circ g)(x)$ g) $(f \circ f)(x)$ h) $(f \circ g \circ h)(x)$ i) $(g \circ h \circ f)(x)$ j) $(h \circ g \circ f)(x)$ k) $(i \circ f \circ h)(x)$

24) Evalúa las siguientes composición de funciones si:

$f(x) = 3x$, $g(x) = 2 - x$ y $h(x) = x^2 - 1$

a) $(g \circ f)(-1)$ b) $(f \circ g)(3)$ c) $(f \circ h)(-2)$ d) $(h \circ g)(5)$ e) $(f \circ g \circ h)(-1)$ f) $(g \circ h \circ f)(1/2)$ g) $(h \circ h \circ h)(0, 5)$